VISIT…

КЛАССИКИ ЕСТЕСТВОЗНАНИЯ

МАТЕМАТИКА
МЕХАНИКА
ФИЗИКА
АСТРОНОМИЯ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА · ЛЕНИНГРАД · 1949

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ VII-X

Перевод с греческого
и комментарии
Д. Д. МОРДУХАЙ-БОЛТОВСКОГО
при редакционном
участии
И. Н. ВЕСЕЛОВСКОГО

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ
ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА · ЛЕНИНГРАД 1949

11-5-4

513
E16

ОТ ИЗДАТЕЛЬСТВА

В конце прошлого года издательство выпустило в русском переводе с греческого снабжённые подробным комментарием первые шесть книг «Начал» Евклида, составившие (в нашем издании) первый том этого замечательного произведения математической мысли. Предлагаемый теперь вниманию читателя второй том евклидовых «Начал» содержит VII, VIII, IX и X книги. Из них первые три посвящены изложению вопросов арифметического и теоретико-числового характера, а десятая книга посвящена исследованию и классификации несоизмеримых величин.

«Начала» Евклида представляют собою полное и систематическое изложение основ геометрии, составленное в начале III века до н. э. одним из величайших древнегреческих математиков. Эту работу Евклид выполнил с таким искусством и такой логической строгостью, что она не только вытеснила в своё время все сочинения подобного рода, написанные другими математиками, но и оставалась потом в течение более чем двух тысячелетий основным источником геометрических знаний для всех культурных народов.

Так как все школьные курсы геометрии в большей или меньшей степени отражают «Начала» Евклида, то их новое русское издание имеет целью не только дать в руки исследователей современный и точный перевод этого классического произведения (поскольку дореволюционные переводы

устарели и стали библиографической редкостью), но и удовлетворить естественное стремление советских педагогов-математиков ближе ознакомиться с «родоначальником» современного «курса элементарной геометрии».

Новый перевод евклидовых «Начал» выполнен с наиболее достоверного греческого текста (Гейберга) профессором Ростовского университета Д. Д. Мордухай-Болтовским при самом близком участии проф. И. Н. Веселовского и снабжён ими подробным комментарием, имеющим целью облегчить читателю понимание текста и сообщить необходимые для этого историко-математические сведения *).

Расположение материала в настоящем томе, нумерация чертежей, примечаний и условные обозначения выполнены по образцу первого тома, поэтому все указания, сделанные на этот счёт в предисловии переводчика к первому тому, остаются в силе и здесь.

---

*) Комментарии, принадлежащие И. Н. Веселовскому, отмечены инициалами *И. В.*

НАЧАЛА ЕВКЛИДА

КНИГИ

VII-X

КНИГА СЕДЬМАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

1. *Единица* есть ⟨то⟩, через что каждое из существующих считается единым (1, 2, 3).

2. *Число* же — множество, составленное из единиц (4, 5, 6).

3. *Часть* есть число в числе, меньшее в большем, если оно измеряет*) большее.

4. «*Части*» же, — если оно его не измеряет (7, 8, 9, 10).

5. *Кратное* же — большее от меньшего, если оно измеряется меньшим.

6. *Чётное число* есть делящееся пополам.

7. *Нечётное же* — не делящееся пополам или отличающееся на единицу от чётного числа.

8. *Чётно-чётное* число есть чётным числом измеряемое чётное число ⟨раз⟩.

9. *Чётно же нечётное* есть чётным числом измеряемое нечётное число ⟨раз⟩ (11).

[10. *Нечётно-чётное* есть нечётным числом измеряемое чётное число ⟨раз⟩.]

11. *Нечётно-нечётное* число есть нечётным числом измеряемое нечётное число ⟨раз⟩.

---

*) В подлиннике «καταμετρῇ» — «измеряет», но ни в коем случае не «*делит*».

У Герона встречаются термины: μερίζειν — делить на части и διαιρεῖν — рассекать (о геометрических фигурах).

12. *Первое* *) число есть измеряемое только единицей.

13. *Первые между собой* числа суть измеряемые только единицей как общей мерой.

14. *Составное число* есть измеряемое некоторым числом.

15. *Составные же между собой числа* суть измеряемые некоторым числом как общей мерой.

16. Говорят, что *число умножает число*, когда сколько в нём единиц, столько раз составляется умножаемое и что-то возникает (12).

17. Когда же два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее ⟨число⟩ называется *плоскостным, стороны* же его суть перемножаемые между собой числа (13, 14).

18. Когда же три числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающее есть *телесное*, стороны же его — перемножаемые между собой числа.

19. Квадратное число есть равноравное **) или объемлемое двумя равными числами (15, 16).

20. Кубическое же — равным равноравное ***) или объемлемое тремя равными числами.

21. *Числа будут пропорциональны*, когда первое от второго, а третье от четвёртого будут или равнократными, или той же частью, или теми же «частями» (17, 18).

22. *Подобные плоскостные* и *телесные числа* суть имеющие пропорциональные стороны (19).

23. *Совершенное число* есть то, которое будет равным своим частям (20).

---

*) Так в подлиннике — πρῶτος ἀριθμός; теперь принято говорить «простое число».

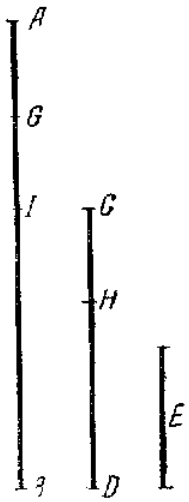
**) В подлиннике ὁ ἰσάκις ἴσος. Слово «ἰσάκις» соответствует нашему «равное число раз ⟨повторяемое⟩» и выражает одинаковую кратность повторения. Термин «объемлемое» (περιεχόμενον) относится уже к геометрическому умножению: квадрат получается как площадь, образуемая двумя равными сторонами, которыми он и «объемлется».

***) В подлиннике ὁ ἰσάκις ἴσος ἰσάκις.

Предложение 1

Если отложены два неравных числа и всё время при «последовательном отнятии» меньшего от большего) остаток не измеряет предшествующего ему ⟨отнимаемого⟩, пока не останется единица, то первоначальные числа будут первыми между собой.*

Пусть для двух [неравных] чисел AB, CD всё время при «последовательном отнятии» меньшего из большего остаток не измеряет предшествующего ему, пока не останется единица; я утверждаю, что AB, CD будут первыми между собой, то-есть, что AB ⟨и⟩ CD измеряет одна только единица (черт. 1).



Черт. 1.

Действительно, если AB, CD не будут первыми между собой, то их измерит какое-то число. Пусть оно измеряет и будет E; и пусть CD, измеряя BI, оставит меньшее себя IA; AI же, измеряя DH, оставит меньшее себя HC; HC же, измеряя IG, оставит единицу GA.

Поскольку теперь E измеряет CD, CD же измеряет BI, то значит, и E измеряет BI; оно же измеряет и всё BA; значит, измерит и остаток AI. Но AI измеряет DH; значит, и E измеряет DH; оно же измеряет и всё DC; значит, измерит и остаток CH. Но CH измеряет IG; значит, и E измеряет IG; оно же измеряет и всё IA; значит, оно измерит и остаток — единицу AG, будучи числом, чего быть не может. Итак, никакое число не будет измерять AB и CD; значит, AB и CD первые между собой, что и требовалось доказать.

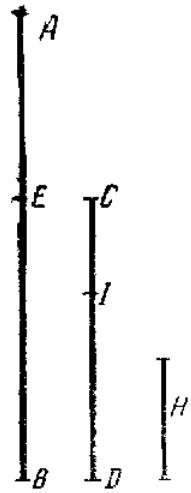
---

*) В подлиннике ἀνθυφαιρούμενος от ἀνθυφαιρεῖν — термин, соответствующий нашему «нахождению общей меры» или «алгорифму Евклида» (у Аристотеля в том же смысле употребляется глагол ἀνταναιρεῖν). При отсутствии на русском языке подходящего термина пришлось перевести «последовательно отнимается», чтобы напомнить хорошо известный алгорифм последовательного деления при нахождении общей меры. Таким образом, наше «последовательное деление» превращается у Евклида в «последовательное отнятие».

Предложение 2

Для двух данных чисел, не первых между собой, найти наибольшую общую их меру.

Пусть данные два числа, не первые между собой, будут AB, CD. Вот требуется для AB, CD найти наибольшую общую меру (черт. 2). Если теперь CD измеряет AB, измеряет также и себя, то значит, CD есть общая мера CD, AB. И ясно, что и наибольшая, ибо никакое ⟨число⟩, большее CD, не измерит CD.



Черт. 2.

Если же CD не измеряет AB, то для AB, CD при постоянном отнятии меньшего из большего останется некоторое число, которое измерит предыдущее. Действительно, единица не останется; в противном случае будут AB, CD первыми между собой (предложение 1); это же не предполагается. Значит, останется какое-то число, которое измерит предыдущее. И пусть CD, измеряя BE, оставит меньшее себя EA, EA же, измеряя DI, оставит меньшее себя IC, CI же пусть будет измерять AE. Поскольку теперь CI измеряет AE, AE же измеряет DI, то значит, CI измерит и DI; оно же измеряет и себя самого; значит, измерит и всё CD. Но CD измеряет BE; значит, и CI измеряет BE; оно же измеряет и EA; значит, измерит и всё BA; оно же измеряет и CD; значит, CI измеряет AB, CD. Значит, CI — общая мера AB, CD. Вот я утверждаю, что ⟨она⟩ и наибольшая. Действительно, если CI не будет наибольшей общей мерой AB, CD, то числа AB, CD измерит какое-то число, большее чем CI. Пусть оно измеряет и будет H. И поскольку H измеряет CD, CD же измеряет BE, то значит, и H измеряет BE; оно же измеряет и всё BA; значит, оно измерит и остаток AE. Но AE измеряет DI; значит, и H измерит DI; оно же измеряет и всё DC; значит, измерит и остаток CI, большее — меньшее: это же невозможно. Значит, числа AB, CD не измерит никакое число, большее CI; значит, CI — наибольшая общая мера AB и CD [что и требовалось доказать].

Следствие

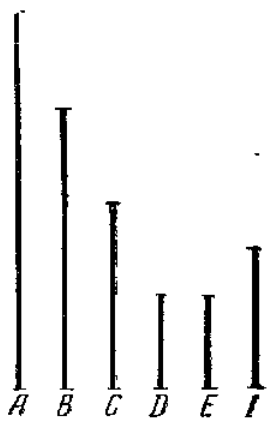
Из этого вот ясно, что если число измеряет два числа, от оно измерит и их наибольшую общую меру *), что и требовалось доказать.

Предложение 3

Для трёх данных чисел, не первых между собой, найти наибольшую общую их меру.

Пусть данные три числа, не первые между собой, будут A, B, C; требуется для A, B, C найти наибольшую общую меру (черт. 3).

Возьмём для двух A, B общую наибольшую меру D (предложение 2); вот D или измеряет, или не измеряет C. Пусть сперва измеряет; оно же измеряет и A, B; значит, D измеряет A, B, C; значит, D есть для A, B, C общая мера. Вот я утверждаю, что ⟨она⟩ и наибольшая. Действительно, если D для A, B, C не будет наибольшей общей мерой, то числа A, B, C измерит какое-то число, бо́льшее D. Пусть оно измеряет и будет E. Поскольку теперь E измеряет A, B, C, то значит, оно измерит и A, B; значит, оно измерит и наибольшую общую меру A, B (предложение 2, следствие). Наибольшая же общая мера A, B есть D; значит, E измеряет D, большее — меньшее; это же невозможно; значит, числа A, B, C не измерит никакое число, большее D; значит, D есть наибольшая общая мера A, B, C.



Черт. 3.

Но вот пусть D не измеряет C; я утверждаю сперва, что C, D не будут первыми между собой. Действительно, поскольку A, B, C не первые между собой, то их измерит какое-то число. Вот измеряющее A, B, C измерит и A, B, измерит и D — наибольшую общую меру A, B (предложе-

*) Так, как H измеряет и AB, CD и их наибольшую общую меру CI (Гейберг).

ние 2, следствие); оно же измеряет и C; значит, числа D, C измерит какое-то число; значит, D, C не будут первыми между собой. Возьмём теперь их наибольшую общую меру E (предложение 2). И поскольку E измеряет D, D же измеряет A, B, то значит, и E измеряет A, B; оно же измеряет и C; значит, E измеряет A, B, C; значит, E есть общая мера A, B, C. Вот я утверждаю, что и наибольшая. Действительно, если E не будет для A, B, C наибольшей общей мерой, то числа A, B, C измерит какое-то число, большее чем E. Пусть оно измеряет и будет I. И поскольку I измеряет A, B, C, оно измеряет и A, B; значит, оно измерит и наибольшую общую меру A, B (предложение 2, следствие). Наибольшая же общая мера A, B есть D; значит, I измеряет D; оно же измеряет и C; значит, I измеряет D, C; значит, оно измерит и наибольшую общую меру D, C. Наибольшая же общая мера D, C есть E; значит, I мерит E, большее — меньшее; это же невозможно. Значит, числа A, B, C не измерит никакое число, большее чем E; значит, E есть наибольшая общая мера A, B, C, что и требовалось доказать (21, 22).

Предложение 4

Всякое число по отношению ко всякому числу — меньшее по отношению к большему — будет или частью, или «частями» *).

Пусть два числа будут A, BC, и пусть меньшее будет BC; я утверждаю, что BC по отношению к A будет или частью, или «частями» (черт. 4).

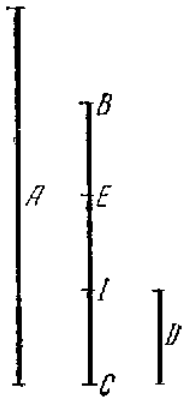
Действительно, A, BC или первые между собой, или нет. Пусть сперва A, BC будут первыми между собой. Тогда при разделении BC на ⟨заключающиеся⟩ в нём

---

*) Ἅπας ἀριθμὸς παντὸς ἀριθμοῦ ὁ ἐλάσσων τοῦ μείζονος ἤτοι μέρος ἐστὶν ἢ μέρη — точный перевод невозможен; по-русски это звучало бы так: «всякое число всякого числа меньшее—большего есть или часть или «части». «Части» надо понимать в смысле определения 4: меньшее число есть или $\frac{1}{n}$ большего («часть»), или же $\frac{m}{n}$ («части»).

единицы каждая единица из ⟨заключающихся⟩ в BC будет какой-то частью A; так что BC будет «частями» A.

Но вот пусть A, BC не будут первыми между собой; тогда BC или измеряет A, или не измеряет. Если теперь BC измеряет A, то BC есть часть A. Если же нет, возьмём для A, BC наибольшую общую меру D (предложение 2) и разделим BC на равные D ⟨части⟩ BE, EI, IC. И поскольку D измеряет A, то D есть часть A; D же равно каждому из BE, EI, IC; значит, и каждое из BE, EI, IC есть часть A; так что BC есть «части» A.

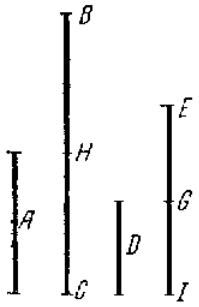


Черт. 4.

Значит, всякое число по отношению ко всякому числу — меньшее по отношению к большему — будет или частью или «частями», что и требовалось доказать (23).

Предложение 5

Если число есть часть числа и другое — такая же часть другого, то и вместе взятые ⟨первые⟩ будут такой же частью вместе взятых ⟨вторых⟩, как одно одного.



Черт. 5.

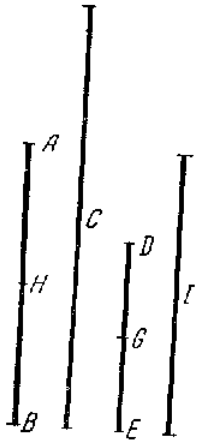
Пусть число A есть часть [числа] BC и другое D — такая же часть другого EI, как A от BC; я утверждаю, что вместе взятые A, D будут такой же частью вместе взятых BC, EI, как A от BC (черт. 5).

Действительно, поскольку какая A часть от BC, такой же частью будет и D от EI, то значит, сколько в BC чисел, равных A, столько же будет в EI чисел, равных D. Разделим BC на равные A ⟨части⟩ BH, HC, EI же — на равные D части EG, GI; вот количество BH, HC будет равно количеству EG, GI. И поскольку BH равно A, а EG равно D, то значит, и ⟨вместе взятые⟩ BH, EG равны ⟨вместе взятым⟩ A, D. На основании того же вот и HC, GI

⟨равны⟩ A, D. Значит, сколько в BC чисел, равных A, столько и в BC, EI будет ⟨чисел⟩, равных A, D. Значит, каково BC, кратное ⟨от⟩ A, таким же кратным и вместе взятые BC, EI будут от вместе взятых A, D. Значит, какая A часть BC, такой же частью и вместе взятые A, B будут от вместе взятых BC, EI, что и требовалось доказать.

Предложение 6

Если число есть «части» числа и другое — такие же «части» другого, то и вместе взятые ⟨первые⟩ будут такими же «частями» вместе взятых ⟨вторых⟩, как одно одного.



Черт. 6.

Пусть число AB есть «части» числа C и другое DE такие же части другого I, как AB от C: я утверждаю, что и вместе взятые AB, DE будут такими же частями вместе взятых C, I, как AB от C (черт. 6).

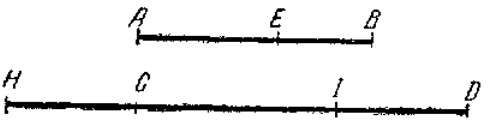
Действительно, поскольку какие AB «части» от C, такими же «частями» будет и DE от I, то значит, сколько в AB частей C, столько же будет и в DE частей I. Разделим AB на части C, ⟨именно⟩ AH, HB, а DE — на части I, ⟨именно⟩ DG, GE; тогда количество AH, HB будет равно количеству DG, GE. И поскольку какая AH часть C, такая же и DG часть I, то значит, какая часть AH от C, такой же частью и вместе взятые AH, DG будут от вместе взятых C, I (предложение 5). По той же вот причине и какая часть HB от C, такой же частью и вместе взятые HB, GE будут от вместе взятых C, I. Значит, какие AB «части» от C, такими же «частями» и вместе взятые AB, DE будут от вместе взятых C, I, что и требовалось доказать.

Предложение 7

Если число есть часть числа такая же, как отнятое отнятого, то и остаток будет такой же частью остатка, как целое целого.

Пусть число AB будет частью числа CD такой же, как отнятое AE отнятого CI; я утверждаю, что и остаток EB будет такой же частью остатка ID, как целое AB целого CD (черт. 7).

Действительно, какая часть AE от CI, пусть такой же частью будет и EB от CH. И поскольку какая AE часть от CI, такая же и EB часть от CH, то значит, какая AE часть от CI, такой же частью будет и AB от HI (предложение 5). Какая же часть AE от CI, такой же частью предполагается и AB от CD; значит, какая часть AB от HI, такой же частью оно будет и от CD; значит, HI равно будет CD. Отнимем общее CI; значит, остаток HC равен остатку ID. И поскольку какая часть AE от CI, такой же частью [будет] и EB от HC, HC же равно ID, то значит, какая часть AE от CI, такой же частью будет и EB от ID. Но какая часть AE от CI, такой же частью будет и AB от CD; и значит, остаток EB будет такой же частью остатка ID, какой целое AB целого CD, что и требовалось доказать.



Черт. 7.

Предложение 8

Если число есть «части» числа такие же, как отнятое отнятого, то и остаток будет такими же «частями» остатка, как целое целого.

Пусть число AB будет «частями» числа CD, такими же, как отнятое AE отнятого CI; я утверждаю, что и остаток EB будет такими же «частями» остатка ID, как целое AB целого CD (черт. 8).

Действительно, положим HG равным AB. Значит, какие «части» HG от CD, такими же «частями» будет и AE от CI. Разделим HG на CD-части HK, KG, а AE на CI-части AL, LE; тогда количество HK, KG будет равно количеству AL, LE. И поскольку какая HK часть от CD, такая же и AL часть от CI, CD же больше CI, то значит,

Им. Горького

и HK больше AL. Положим HM равным AL. Значит, какая часть HK от CD, такой же частью и HM будет от CI; значит, и остаток MK будет такой же частью остатка ID, как целое HK целого CD (предложение 7). Опять, поскольку какая KG часть от CD, такой же частью будет и EL от CI, CD же больше CI, то значит, и GK больше EL. Положим KN равным EL. Значит, какая KG часть от CD, такой же частью будет и KN от CI; значит, и остаток NG будет такой же частью остатка ID, как целое KG целого CD (предложение 7). Доказано же, что и остаток MK является такой же частью остатка ID, как целое HK целого CD; значит, и вместе взятые MK, NG будут такой же частью DI, как целое GH целого CD. Вместе же взятые MK, NG равны EB*), GH же ⟨равно⟩ BA; значит, и остаток EB будет такой же частью остатка ID, как целое AB целого CD, что и требовалось доказать.

Черт. 8.

Предложение 9

Если число есть часть числа и другое — такая же часть другого, то и «перестановкой», какая часть или «части» первое от третьего, такой же частью или такими же «частями» будет и второе от четвёртого.

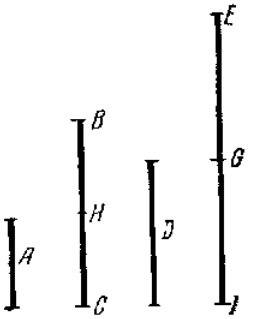
Пусть число A будет частью числа BC и другое D — такой же частью от другого EI, как A от BC; я утверждаю, что и «перестановкой», какая часть или «части» A от D, такой же частью или «частями» будет и BC от EI (черт. 9).

Действительно, поскольку какая часть A от BC, такая же часть и D от EI, то значит, сколько в BC чисел, равных A, столько и в EI будет равных D. Разделим BC на

*) Действительно, $HM+MK+KN+NG=AL+LE+EB$ и $HM=AL$, $KN=EL$ (Гейберг).

равные A ⟨части⟩ BH, HC, а EI — на равные D ⟨части⟩ EG, GI; тогда количество BH, HC равно будет количеству EG, GI.

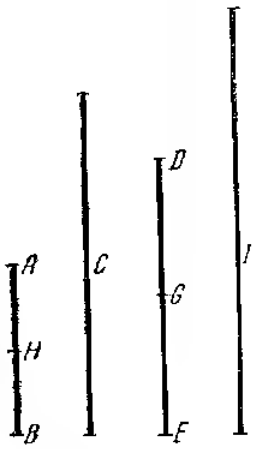
И поскольку числа BH, HC равны между собой, также и числа EG, GI равны между собой, и количество BH, HC равно количеству EG, GI, то значит, такая часть или «части» BH от EG, такой же частью или такими же «частями» будет и HC от GI; так что какая часть или «части» BH от EG, такой же частью или такими же «частями» будет и вместе взятое BC от вместе взятого EI (предложения 5 и 6). Но BH равно A, EG же равно D; значит, какая часть или «части» A от D, такой же частью или такими же «частями» будет и BC от EI, что и требовалось доказать.



Черт. 9.

Предложение 10

Если число есть «части» числа и другое — такие же «части» другого, то и «перестановкой», какие «части» или часть первое от третьего, такими же «частями» или такой же частью будет и второе от четвёртого.



Черт. 10.

Пусть число AB будет «частями» числа C и другое DE такими же «частями» другого I; я утверждаю, что и «перестановкой», какие «части» или часть AB от DE, такими же «частями» или такой же частью будет и C от I (черт. 10).

Действительно, поскольку какие «части» есть AB от C, такими же «частями» будет и DE от I, то значит, сколько в AB частей C, столько и в DE будет частей I. Разделим AB на C-части AH, HB, а DE на I-части DG, GE; тогда количество AH, HB будет равно количеству DG, GE. И

поскольку какая часть AH от C, такой же частью будет и DG от I, и «перестановкой», какая часть или «части» AH от DG, такой же частью или такими же частями будет и C от I (предложение 9). По той же вот причине и какая часть или «части» HB от GE, такой же частью или такими «частями» будет и C от I; так что и [какая часть или «части» есть AH от DG, такой же частью или такими же «частями» будет и HB от GE; и значит, какая часть или «части» есть AH от DG, такой же частью или такими же «частями» будет и AB от DE; но какая часть или «части» есть AH от DG, такая же часть или «части» есть, как показано, и C от I, и] какие [значит] «части» или часть есть AB от DE, такими же «частями» или такой же частью будет и C от I, что и требовалось доказать.

Предложение 11

Если как целое к целому, так и отнятое к отнятому, то и остаток к остатку будет как целое к целому.

Черт. 11.

Пусть как целое AB к целому CD, так и отнятое AE к отнятому CI (черт. 11); я утверждаю, что и остаток EB к остатку ID будет, как целое AB к целому CD.

Поскольку как AB к CD, так и AE к CI, то значит, какая часть или «части» есть AB от CD, такой же частью или «частями» будет AE от CI (определение 21). И значит, остаток EB будет такой же частью или «частями» остатка ID, как и AB от CD (предложения 7, 8). Значит, будет, что как EB к ID, так и AB к CD, что и требовалось доказать.

Предложение 12

Если несколько чисел пропорциональны, то будет, что как один из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим).*

*) Подразумевается — вместе взятые к вместе взятым.

Пусть будут несколько чисел A, B, C, D пропорциональны, ⟨т. е.⟩ как A к B, так и C к D; я утверждаю, что будет как A к B, так и A, C к B, D (черт. 12).

В самом деле, поскольку как A к B, так и C к D, то значит, какая часть или «части» есть A от B, такой же частью или «частями» будет и C от D (определение 21). И значит, вместе взятые A, C от вместе взятых B, D будут такой же частью или такими же «частями», как A от B (предложения 5,6). Значит, будет, что как A к B, так и A, C к B, D (определение 21), что и требовалось доказать.

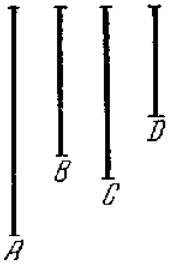
Черт. 12.

Предложение 13

Если четыре числа пропорциональны, то и перестановкой они будут пропорциональны.

Пусть будут четыре числа A, B, C, D пропорциональны, ⟨т. е.⟩ как A к B, так и C к D; я утверждаю, что и перестановкой они будут пропорциональны — как A к C, так и B к D (черт. 13).

Действительно, поскольку как A к B, так и C к D, то значит, какая часть или «части» есть A от B, такой же частью или такими же «частями» будет и C от D (определение 21). Значит, перестановкой, какая часть или «части» есть A от C, такой же частью или такими же «частями» будет и B от D (предложение 10). Значит, будет, что как A к C, так и B к D (определение 21), что и требовалось доказать.

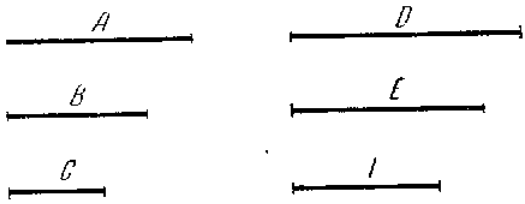


Черт. 13.

Предложение 14

Если будет сколь угодно чисел и других, равных им по количеству, взятых попарно и в том же самом отношении, то и «по равенству» они будут в том же самом отношении.

Пусть будет сколь угодно чисел A, B, C и других, равных им по количеству, взятых попарно в том же самом отношении D, E, I, — как A к B, так и D к E, как же B к C, так и E к I (черт. 14); я утверждаю, что и «по равенству» будут как A к C, так и D к I.

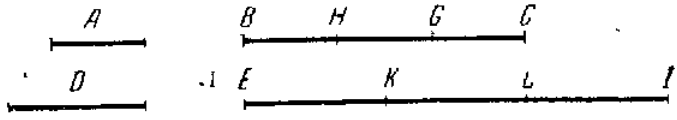


Черт. 14.

Действительно, поскольку как A к B, так и D к E, то значит, и перестановкой будут как A к D, так и B к E (предложение 13). Опять, поскольку как B к C, так и E к I, то значит, и перестановкой будет как B к E, так и C к I. Как же B к E, так и A к D; и значит, как A к D, так и C к I; перестановкой, значит, будет как A к C, так и D к I, что и требовалось доказать.

Предложение 15

Если единица измеряет некоторое число, а другое число равное ⟨число раз⟩ измеряет некоторое иное число, то и перестановкой равное ⟨число раз⟩ единица будет измерять третье число, а второе — четвёртое.



Черт. 15.

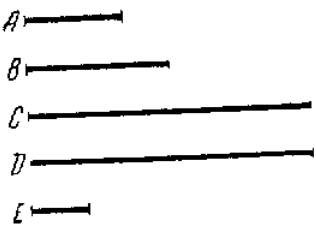
Пусть единица A измеряет некоторое число BC, а другое число D равное ⟨число раз⟩ измеряет некоторое иное число EI; я утверждаю, что и перестановкой равное ⟨число раз⟩ единица A измеряет число D, а BC — ⟨число⟩ EI (черт. 15).

Действительно, поскольку равное ⟨число раз⟩ единица A измеряет число BC, а D — ⟨число⟩ EI, то значит, сколько в BC есть единиц, столько и в EI будет чисел, равных D. Разделим BC на ⟨содержащиеся⟩ в ней единицы BH, HG, GC, а EI — на равные D ⟨числа⟩ EK, KL, LI. Тогда количество BH, HG, GC будет равно количеству EK, KL, LI. И поскольку равны между собой единицы BH, HG, GC, равны также между собой и числа EK, KL, LI, и количество единиц BH, HG, GC равно количеству чисел EK, KL, LI, то значит, будет, что как единица BH к числу EK, так и единица HG к числу KL, и единица GC к числу LI. И значит, будет, что как один из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12); будет, значит, что как единица BH к числу EK, так и BC к EI. Единица же BH равна единице A, число же EK — числу D. Значит, будет, что как единица A к числу D, так и BC к EI. Значит, равное ⟨число раз⟩ единица A измеряет число D и BC — ⟨число⟩ EI, что и требовалось доказать (25).

Предложение 16

Если два числа, перемножаемые между собой, производят нечто, то возникающие из них будут равны между собой.

Пусть будут два числа A, B и пусть A, умножая B, производит C; B же, умножая A, производит D; я утверждаю, что C будет равно D (черт. 16).



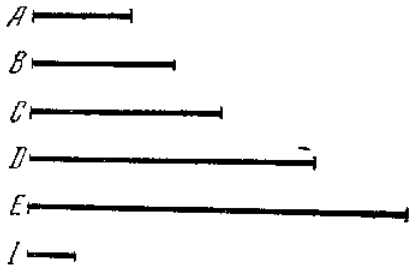
Черт. 16.

Действительно, поскольку A, умножая B, произвело C, то, значит, B измеряет C по ⟨количеству⟩ единиц в A. Также и единица E измеряет число A по ⟨количеству содержащихся⟩ в нём единиц; значит, равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число A, и B — ⟨число⟩ C. Значит, и перестановкой равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число B и A — ⟨число⟩ C (предложение 15). Опять, поскольку B, умножая

A, произвело D, то значит, A измеряет D по ⟨количеству содержащихся⟩ в B единиц. Также и единица E измеряет B по ⟨количеству содержащихся⟩ в нём единиц; значит, равное ⟨число раз⟩ единица E измеряет число B, и A — ⟨число⟩ D. Но равное ⟨число раз⟩ единица E измеряла число B, и A — ⟨число⟩ C; значит, равное ⟨число раз⟩ A измеряет каждое из C, D. Значит, C равно D, что и требовалось доказать (26, 27, 28).

Предложение 17

Если число, умножая два числа, производит нечто, то возникающие из них будут иметь то же самое отношение, что и умножаемые.



Черт. 17.

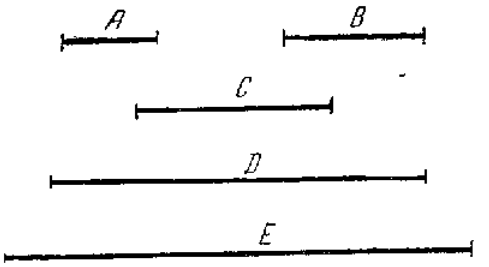
Пусть число A, умножая два числа B, C, производит D, E; я утверждаю, что будет как B к C, так и D к E (черт. 17).

Действительно, поскольку A, умножая B, произвело D, то значит, B измеряет D по ⟨количеству⟩ единиц в A. Также и единица I измеряет число A по ⟨количеству содержащихся⟩ в нём единиц; значит, равное ⟨число раз⟩ единица I измеряет число A, и B — ⟨число⟩ D. Значит, будет, что как единица I к числу A, так и B к D (определение 21). По той же вот причине и как единица I к числу A, так и C к E; и, значит, как B к D, так и C к E. Значит, перестановкой будет, что как B к C, так и D к E, что и требовалось доказать.

Предложение 18

Если два числа, умножая некоторое число, производят нечто, то возникающие из них будут иметь то же самое отношение, что и умножающие.

Пусть два числа A, B, умножая некоторое число C, производят D, E; я утверждаю, что будет как A к B, так и D к E (черт. 18).

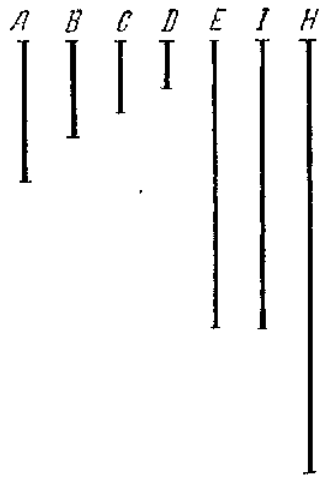


Черт. 18.

Действительно, поскольку A, умножая C, произвело D, значит, и C, умножая A, произвело D (предложение 16). По той же вот причине и C, умножая B, произвело E. Вот число C, умножая два числа A, B, произвело D, E. Значит, будет, что как A к B, так и D к E (предложение 17), что и требовалось доказать.

Предложение 19

Если четыре числа пропорциональны, то возникающее из первого и четвёртого число будет равно возникающему из второго и третьего числу; и если возникающее из первого и четвёртого число равно ⟨возникающему⟩ из второго и третьего, то четыре числа будут пропорциональны.



Черт. 19.

Пусть будут четыре пропорциональных числа A, B, C, D, ⟨т. е.⟩ как A к B, так и C к D, и пусть A, умножая D, производит E; B же, умножая C, производит I; я утверждаю, что E будет равно I (черт. 19).

В самом деле, пусть A, умножая C, произведёт H. Поскольку теперь A, умножая C, произвело H, умножая же D, произвело E, то вот число A, умножая два числа C, D, произвело H, E. Значит, будет, что как C к D, так и H к E (предложение 17). Но как C к D, так и A к B; и, значит, как A к B, так и H к E. Опять, поскольку A, умножая C, произвело H, но вместе с тем и B, умножая

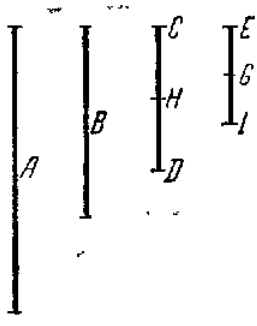
C, произвело I, то вот два числа A, B, умножая некоторое число C, произвели H, I. Значит, будет, что как A к B, так и H к I (предложение 18). Но вместе с тем и как A к B, так и H к E; и значит, как H к E, так и H к I. Значит, H к каждому из E, I имеет то же самое отношение; значит, E равно I (предложение 9 книги V).

Опять вот пусть E будет равно I; я утверждаю, что будет как A к B, так и C к D.

Действительно, после тех же самых построений, поскольку E равно будет I, то значит, будет, что как H к E, так и H к I (предложение 7 книги V). Но как H к E, так и C к D (предложение 17), как же H к I, так и A к B (предложение 18). И значит, как A к B, так и C к D, что и требовалось доказать (29, 30).

Предложение 20

Числа, наименьшие из имеющих то же самое отношение с ними, равное ⟨число раз⟩ измеряют имеющие то самое же отношение ⟨числа⟩, причём большее ⟨измеряет⟩ большее, а меньшее — меньшее.



Черт. 20.

Пусть CD, EI будут числа наименьшие из имеющих то же самое отношение с A, B; я утверждаю, что равное ⟨число раз⟩ CD измеряет A, а EI ⟨измеряет⟩ B (черт. 20).

Действительно, CD не является «частями» A. В самом деле, пусть оно, если возможно, будет ⟨ими⟩; значит, и EI будет такими же «частями» от B, как CD от A. Значит, сколько в CD частей A, столько же будет и в EI частей B. Разделим CD на A-части CH, HD, а EI на B-части EG, GI; тогда количество CH, HD равно будет количеству EG, GI. И поскольку числа CH, HD равны между собой, так же и числа EG, GI равны между собой, и количество CH, HD равно количеству EG, GI, то значит, как CH к EG, так и HD к GI. Значит, будет, что и как один из предыдущих к одному из последующих, так

и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12). Будет, значит, что как CH к EG, так и CD к EI; значит, CH, EG с CD, EI находятся в том же самом отношении, будучи меньше их; это же невозможно, ибо CD, EI предполагаются наименьшими из имеющих то же самое отношение с ними. Значит, CD не является «частями» A; значит, ⟨оно⟩ — часть (предложение 4). И EI от B является такой же частью, что CD от A; значит, равное ⟨число раз⟩ CD измеряет A, и EI ⟨измеряет⟩ B, что и требовалось доказать (31).

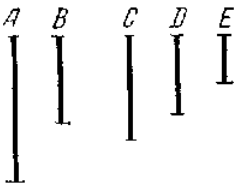
Предложение 21

Первые между собой числа суть наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение.

Пусть будут первые между собой числа A, B; я утверждаю, что A, B суть наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение (черт. 21).

Действительно, если нет, то будут какие-то меньшие A, B числа, находящиеся в том же самом отношении с A, B. Пусть они будут C, D.

Поскольку теперь числа, наименьшие из имеющих то же самое отношение, равное ⟨число раз⟩ измеряют имеющие то же самое отношение, именно большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20), то-есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее, то значит, равное ⟨число раз⟩ C измеряет A, и D ⟨измеряет⟩ B. Вот, сколько раз C измеряет A, пусть столько единиц будет в E. Значит, и D измеряет B по ⟨количеству⟩ единиц в E. И поскольку C измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в E, значит, и E измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в C (предложение 15). По той же вот причине E измеряет и B по ⟨количеству⟩ единиц в D (предложение 15). Значит, E измеряет A, B, являющиеся между собой первыми; это же невозможно (определение 13). Значит, не будет никаких меньших A, B чисел, находящихся в том же самом отношении с A, B, что и требовалось доказать.



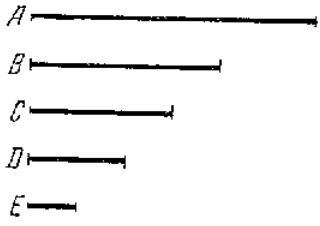
Черт. 21.

Предложение 22

Числа, наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение, будут первыми между собой.

Пусть числа, наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение, будут A, B; я утверждаю, что A, B будут первыми между собой (черт. 22).

Действительно, если они не первые между собой, то какое-то число ⟨их⟩ измерит. Пусть оно измеряет и будет C. И сколько раз C измеряет A, пусть столько единиц будет в D; сколько же раз C измеряет B, пусть столько единиц будет в E.



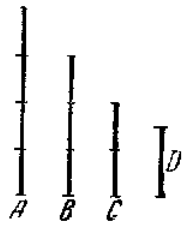
Черт. 22.

Поскольку C измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в D, то значит, C, умножая D, произвело A (определение 16). По той же вот причине и C, умножая E, произвело B. Вот число C, умножая два числа D, E, произвело A, B; значит, будет, что как D к E, так и A к B (предложение 17); значит, D, E с A, B находятся в том же самом отношении, будучи меньше их; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит числа A, B. Значит, A, B суть первые между собой, что и требовалось доказать (32).

Предложение 23

Если два числа суть первые между собой, то число, измеряющее одно из них, будет первым с оставшимся.

Пусть будут два числа, первые между собой, A, B, и пусть какое-то число C измеряет A; я утверждаю, что и C, B будут первыми между собой (черт. 23).



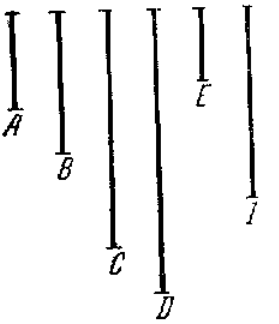
Черт. 23.

Действительно, если C, B не будут первыми между собой, то [какое-то] число измерит C, B. Пусть оно измеряет и будет D. Поскольку D измеряет C, C же измеряет A, то значит, D измеряет и A. Измеряет оно также и B; значит, D измеряет A, B, являющиеся между собой первыми; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит чисел C, B. Значит, C, B будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 24

Если два числа будут первыми по отношению к какому-то числу, то и возникающее из них ⟨произведение⟩ будет по отношению к нему первым.

Пусть два числа A, B будут первыми по отношению к какому-то числу C, и пусть A, умножая B, производит D; я утверждаю, что C, D будут первыми между собой (черт. 24).



Черт. 24.

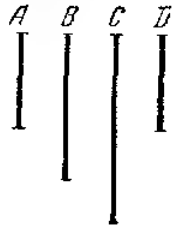
Действительно, если C, D не будут первыми между собой, то [какое-то] число измерит C, D. Пусть оно измеряет и будет E. И поскольку C, A — первые между собой, C же измеряется*) каким-то числом E, то значит, A, E будут первыми между собой (предложение 23). Вот сколько раз E измеряет D, пусть столько единиц будет в I; и значит, I измеряет D по ⟨количеству⟩ единиц в E (предложение 15). Значит, E, умножая I, произвело D (определение 16). Вместе с тем и A, умножая B, произвело D; значит, ⟨произведение⟩ из E, I равно ⟨произведению⟩ из A, B. Если же произведение крайних будет равно произведению средних, то четыре эти числа будут пропорциональны**); значит, будет, что как E к A, так и B к I. Но A, E — первые, первые же и наименьшие (предложение 21), числа же, наименьшие из имеющих то же самое отношение, равное ⟨число раз⟩ измеряют большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20), т. е. предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; значит, E измеряет B. Оно также измеряет и C; значит, E измеряет B, C, являющиеся между собой первыми; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит числа C, D. Значит, C, D будут первыми между собой, что и требовалось доказать

*) Во избежание недоразумений, действительный оборот подлинника заменён страдательным.

**) Интересно отметить, что формулировка эта не совпадает с формулировкой предложения 19, являясь с ним по существу тождественной: в данном случае мы имеем ὑπὸ τῶν ἄκρων, ὑπὸ τῶν μέσων, тогда как в предложении 19 употреблено γενόμενος ἐκ.

Предложение 25

Если два числа суть первые между собой, то возникающая из одного из них ⟨степень⟩) будет первой по отношению к оставшемуся.*



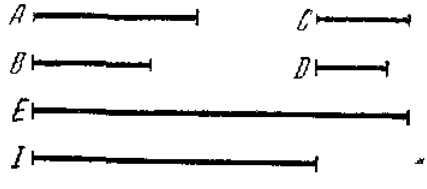
Черт. 25.

Пусть два числа, первые между собой, будут A, B, и пусть A, умножая самого себя, произведёт C; я утверждаю, что B, C будут первыми между собой (черт. 25).

Действительно, положим D равным A. Поскольку A, B—первые между собой, A же равно D, то значит, и D, B будут первые между собой. Значит, каждое из D, A будет по отношению к B первым; значит, и возникающее из D, A будет по отношению к B первым. Возникающее же из D, A число есть C. Значит, C, B будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 26

Если два числа по отношению к двум числам будут—оба по отношению к каждому — первыми, то и возникающие из них будут первыми между собой.



Черт. 26.

Пусть два числа A, B по отношению к двум числам C, D будут — оба по отношению к каждому — первыми, и пусть A, умножая B, произведёт E; C же, умножая D, произведёт I; я утверждаю, что E, I будут первыми между собой (черт. 26).

Действительно, поскольку каждое из A, B является по отношению к C первым, то значит, и возникающее из A, B ⟨произведение⟩ будет по отношению к C первым (предложение 24). Возникающее же из A, B ⟨произведение⟩ есть E; значит, E, C суть первые между собой. По той

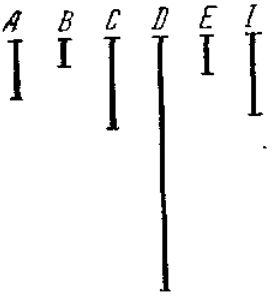
---

*) ὁ ἐκ τοῦ ἑνὸς αὐτῶν γενόμενος — первоначальная форма выражения «ὁ ἀπὸ τοῦ...» — наше «квадрат на...».

же вот причине и E, D будут первыми между собой. Значит, каждое из C, D по отношению к E является первым. Значит, и возникающее из C, D ⟨произведение⟩ по отношению к E будет первым. Возникающее же из C, D ⟨произведение⟩ есть I. Значит, E, I будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 27

Если два числа будут первыми между собой и каждое, умножая само себя, производит что-то, то и возникающие из них ⟨произведения⟩ будут первыми между собой; и если первоначальные ⟨числа⟩, умножая эти возникающие, производят что-то, то и эти последние будут первыми между собой [и то же всегда будет происходить в дальнейшем)].*



Черт. 27.

Пусть два числа, первые между собой, будут A, B, и пусть A, умножая само себя, произведёт C, умножая же C, произведёт D, а B, умножая само себя, произведёт E, умножая же E, произведёт I; я утверждаю, что C, E и D, I будут первыми между собой (черт. 27).

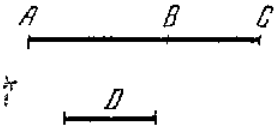
Действительно, поскольку A, B — первые между собой, и A, умножая само себя, произвело C, то значит, C, B будут первыми между собой (предложение 25). Поскольку теперь C, B первые между собой, и B, умножая само себя, произвело E, то значит, C, E будут первыми между собой. Опять, поскольку A, B — первые между собой, и B, умножая само себя, произвело E, то значит, A, E будут первыми между собой. Поскольку теперь два числа A, C по отношению к двум числам B, E будут оба по отношению к каждому первыми, то значит, и возникающее из A, C по

*) В подлиннике сказано: περὶ τοὺς ἄκρους — для крайних. Ввиду того, что этот термин не встречается в самом тексте доказательства, Гейберг считает поставленные в квадратных скобках слова позднейшей, хотя и сравнительно ранней (до Теона) интерполяцией.

отношению к ⟨возникающему⟩ из B, E будет первым (предложение 26). И ⟨возникающее⟩ из A, C есть D, ⟨возникающее⟩ же из B, E ⟨есть⟩ I. Значит, D, I будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 28

Если два числа будут первыми между собой, то и оба вместе взятые) по отношению к каждому из них будут первыми; и если оба вместе взятые являются первыми по отношению к какому-нибудь одному из них, то и первоначальные числа будут первыми между собой.*



Черт. 28.

Сложим два первые между собой числа AB, BC; я утверждаю, что и оба вместе взятые AC по отношению к каждому из AB, BC будут первыми (черт. 28).

Действительно, если не будут CA, AB первыми между собой, то какое-то число измерит CA, AB. Пусть оно измеряет и будет D. Поскольку теперь D измеряет CA, AB, то значит, оно будет измерять и остаток BC**). Измеряет оно также и BA; значит, D измеряет AB, BC, являющиеся первыми между собой; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит числа CA, AB; значит, CA, AB будут первыми между собой. По той же вот причине и AC, CB будут первыми между собой. Значит, CA будет первым по отношению к каждому из AB, BC.

Затем пусть вот будут CA, AB первыми между собой; я утверждаю, что и AB, BC будут первыми между собой.

Действительно, если не будут AB, BC первыми между собой, то какое-то число измерит AB, BC. Пусть оно изме-

---

*) В подлиннике συναμφότερος, что не вполне точно соответствует нашей «сумме»; по существу здесь идёт речь об отрезке прямой, составленном из двух изображающих числа отрезков.

**) Интересно отметить, что это положение у Евклида нигде не доказывается; повидимому он, или его первоисточник, считал очевидным, что, если число измеряет сумму и одно слагаемое, то оно будет измерять и другое слагаемое, и также, что число, измеряющее оба слагаемых, будет измерять и сумму.

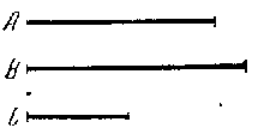
ряет и будет D. И поскольку D измеряет каждое из AB, BC, то значит, оно измерит и целое CA*). Измеряет оно также и AB; значит, D измеряет CA, AB, являющиеся первыми между собой; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит чисел AB, BC. Значит, AB, BC будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

196017 К

Предложение 29

Всякое первое число будет первым по отношению к каждому числу, которого оно не измеряет.

Пусть будет первое число A и пусть оно не измеряет B; я утверждаю, что B, A будут первыми между собой (черт. 29).



Черт. 29.

Действительно, если не будут B, A первыми между собой, то какое-то число их измерит. Пусть их измеряет C. Поскольку C измеряет B, A же не измеряет B, то значит, C не будет тождественным A. И поскольку C измеряет B, A, то значит, оно измеряет и A, являющееся первым и с ним не тождественное; это же невозможно. Значит, никакое число не измерит B, A. Значит, A, B будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 30

*Если два числа, умножая друг друга, производят что-то, возникающее же из них измеряется**) каким-то первым числом, то ⟨последнее⟩ измерит и одно из первоначальных.*

Пусть два числа A, B, умножая друг друга, производят C, и пусть C измеряется каким-то первым числом D; я утверждаю, что D измеряет одно из A, B (черт. 30).

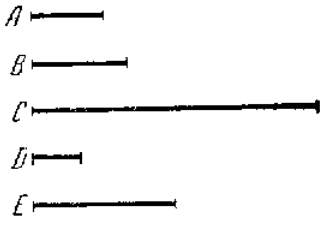
Действительно, пусть оно не измеряет A, и D есть первое; значит, A, D будут первыми между собой (предложе-

*) См. предыдущую сноску.

**) Во избежание двусмысленности, действительный оборот подлинника заменён страдательным.

им. ГОРЬКОГО

ние 29). И сколько раз D измеряет C, пусть столько единиц будет в E. Поскольку теперь D измеряет C по ⟨количеству⟩ единиц в E, то значит, D, умножая E, произвело C (определение 16). Вместе с тем и A, умножая B, произвело C; значит, ⟨произведение⟩ из D, E равно ⟨произведению⟩ из A, B; значит, будет, что как D к A, так и B к E. Но D, A — первые, первые же и наименьшие, наименьшие же измеряют имеющие то же самое отношение равное ⟨число раз⟩ большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20), то-есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; значит, D измеряет B. Подобно вот докажем, что и если оно не измеряет B, то будет измерять A. Значит, D измеряет одно из A, B, что и требовалось доказать.



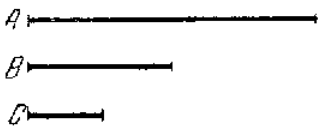
Черт. 30.

Предложение 31

Всякое составное число измеряется каким-то первым числом.

Пусть будет составное число A; я утверждаю, что A измеряется каким-то первым числом (черт. 31).

Действительно, поскольку A есть составное, его измерит какое-то число. Пусть оно измеряет и будет B. И если B первое, то заданное уже было бы выполнено. Если же ⟨оно⟩ составное, то его измерит какое-то число. Пусть оно измеряет и будет C. И поскольку C измеряет B, B же измеряет A, то значит, и C измеряет A. И если C первое, то заданное уже было бы выполнено. Если же оно составное, то его будет измерять какое-то число. Вот при производстве такого пересмотра останется какое-то первое число, которое измерит. Действительно, если бы не осталось, то число A будет измеряться бесконечным ⟨рядом⟩



Черт. 31

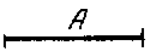
чисел*), из которых каждое каждого будет меньше; это же невозможно для чисел. Значит, останется какое-то первое число, которое измерит предыдущее, которое измерит и A.

Значит, всякое составное число измеряется каким-то первым числом, что и требовалось доказать (33, 34).

Предложение 32

Всякое число — или первое, или измеряется каким-то первым числом.

Пусть будет число A; я утверждаю, что оно — или первое, или измеряется каким-то первым числом (черт. 32.)



Черт. 32.

Если теперь A первое, то заданное уже было бы выполнено. Если же — составное, то его будет измерять какое-то первое число.

Значит, всякое число — или первое, или измеряется каким-то первым числом, что и требовалось доказать.

Предложение 33

Для заданных в любом количестве чисел найти наименьшие из имеющих то же самое отношение с ними.

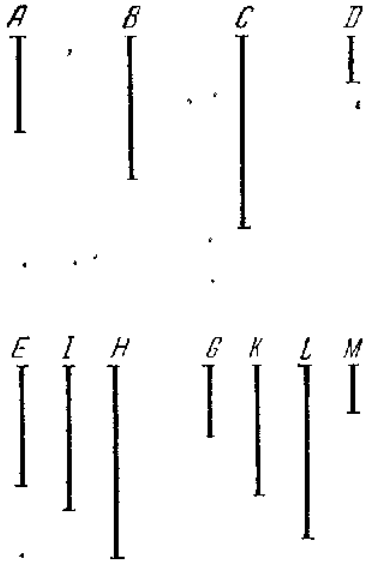
Пусть будут заданные в любом количестве числа A, B, C; вот требуется найти наименьшие из имеющих то же самое отношение с A, B, C (черт. 33).

Действительно, A, B, C будут или первыми между собой, или же нет. Если теперь A, B, C будут первыми между собой, то они будут наименьшими из имеющих то же самое отношение с ними (предложение 21).

Если же нет, то возьмём для A, B, C наибольшую общую меру D (предложение 3), и сколько раз D измеряет каждое из A, B, C, пусть будет столько единиц в каждом из F, I, H. И значит, каждое из E, I, H измеряет каждое

*) Для ясности действительный оборот подлинника переделан в страдательный.

из A, B, C по ⟨количеству⟩ единиц в D (предложение 15). Значит, E, I, H равное ⟨число раз⟩ измеряют A, B, C; значит, E, I, H находятся с A, B, C в том же самом отношении (определение 21). Вот я утверждаю, что ⟨они⟩ и наименьшие. Действительно, если не будут E, I, H наименьшими из имеющих то же самое отношение с A, B, C, то будут [какие-то] меньшие E, I, H числа, находящиеся в том же самом отношении с A, B, C. Пусть они будут G, K, L; значит, равное ⟨число раз⟩ G измеряет A, и каждое из K, L ⟨измеряет⟩ каждое из B, C. Сколько же раз G измеряет A, пусть будет столько единиц в M; и значит, каждое из K, L измеряет каждое из B, C по ⟨количеству⟩ единиц в M. И поскольку G измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в M, то значит, и M измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в G (предложение 15). По той же вот причине M измеряет и каждое из B, C по ⟨количеству⟩ единиц в каждом из K, L; значит, M измеряет A, B, C. И поскольку G измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в M, то значит, G, умножая M, произвело A (определение 16). По той же вот причине и E, умножая D, произвело A. Значит, ⟨произведение⟩ из E, D равно будет ⟨произведению⟩ из G, M. Значит, будет, что как E к G, так и M к D (предложение 19). Но E больше, чем G; значит, и M больше, чем D (предложение 14 книги V). И оно измеряет A, B, C; это же невозможно, ибо D предполагается для A, B, C наибольшей общей мерой. Значит, не будет никаких меньших, чем E, I, H, чисел, находящихся в том же самом отношении с A, B, C. Значит, E, I, H будут наименьшие из имеющих то же самое отношение с A, B, C, что и требовалось доказать (35).



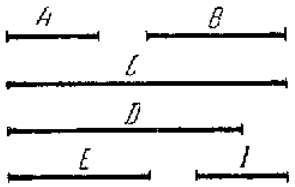
Черт. 33.

Предложение 34

Для двух заданных чисел найти, какое наименьшее число они измеряют.

Пусть два заданных числа будут A, B; требуется вот найти, какое наименьшее число они измеряют (черт. 34).

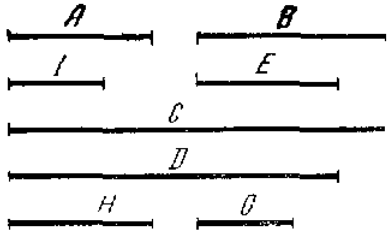
Действительно, A, B будут или первыми между собой или нет. Пусть сперва A, B будут первыми между собой, и пусть A, умножая B, произведёт C; и значит, B, умножая A, произвело C (предложение 16). Значит, A, B измеряют C. Вот я утверждаю, что ⟨оно⟩ и наименьшее. Действительно, если нет, то A, B измерят какое-то число, меньшее C. Пусть они измеряют D. И сколько раз A измеряет D, пусть столько единиц будет в E; сколько же раз B измеряет D, пусть столько единиц будет в I; значит, A, умножая E, произвело D, а B, умножая I, произвело D (определение 16), значит, ⟨произведение⟩ из A, E равно ⟨произведению⟩ из B, I. Значит, будет, что как A к B, так и I к E (предложение 19). Но A, B первые, первые же и наименьшие (предложение 21), наименьшие же измеряют имеющие то же самое отношение равное ⟨число раз⟩, большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20); значит, B измеряет E, как последующее ⟨измеряет⟩ последующее. И поскольку A, умножая B, E, произвело C, D, то значит, будет, что как B к E, так и C к D (предложение 17) Но B измеряет E; значит, и C измеряет D (определение 21), большее — меньшее; это же невозможно. Значит, A, B не измеряют никакого числа, меньшего, чем C. Значит, C, будучи наименьшим, измеряется A, B.



Черт. 34.

Вот пусть A, B не будут первыми между собой, и возьмём наименьшие числа I, E из имеющих то же самое отношение с A, B (предложение 33); значит, ⟨произведение⟩ из A, E равно будет ⟨произведению⟩ из B, I (предложение 19). И пусть A, умножая E, произведёт C; значит, и B, умножая I, произвело C; значит, A, B измеряют C. Вот я утверждаю, что ⟨оно⟩ и наименьшее (черт. 35). Действительно, если нет, то A, B измерят какое-то число, меньшее C. Пусть

они измеряют D. И сколько раз A измеряет D, пусть столько единиц будет в H; сколько же раз B измеряет D, пусть столько единиц будет в G. Значит, A, умножая H, произвело D, а B, умножая G, произвело D (определение 16). Значит ⟨произведение⟩ из A, H равно ⟨произведению⟩ из B, G; значит, будет, что как A к B, так и G к H (предложение 19). Как же A к B, так и I к E; и значит, как I к E, так и G к H. Но I, E — наименьшие, наименьшие же измеряют имеющие то же самое отношение равное ⟨число раз⟩, большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20); значит, E измеряет H. И поскольку A, умножая E, H, произвело C, D, то значит, будет, что как E к H, так и C к D (предложение 17). Но E измеряет H; значит, и C измеряет D (определение 21), большее меньшее; это же невозможно. Значит, A, B не измерят никакого числа, меньшего чем C. Значит, C, будучи наименьшим, измеряется A, B, что и требовалось доказать.

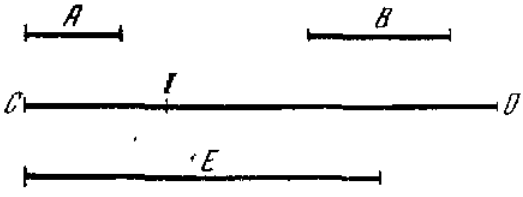


Черт. 35.

Предложение 35

Если два числа измеряют какое-то число, то его измерит и наименьшее ими измеряемое ⟨число⟩.

Пусть два числа A, B измеряют какое-то число CD, наименьшее же ⟨ими измеряемое⟩ E; я утверждаю, что и E измеряет CD (черт. 36).



Черт. 36.

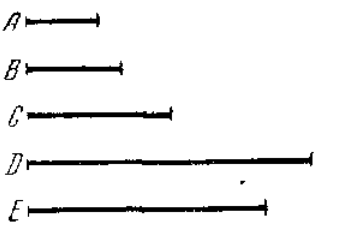
Действительно, если E не измеряет CD, то пусть E, измеряя DI, оставит CI, меньшее себя. И поскольку A, B измеряют E, E же измеряет DI, то, значит, и A, B измерят DI. Но они измеряют и всё CD; значит, они измерят и остаток CI, который меньше E; это же невозможно. Значит, E не будет не измерять CD; значит, измерит, что и требовалось доказать.

Предложение 36

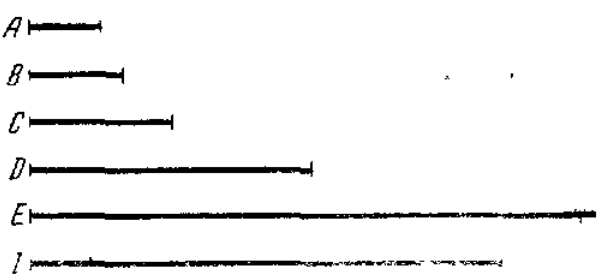
Для трёх заданных чисел найти, какое наименьшее число они измеряют.

Пусть три заданных числа будут A, B, C; требуется вот найти, какое наименьшее число они измеряют (черт. 37, 38).

Возьмём наименьшее измеряемое двумя A, B ⟨число⟩ D (предложение 34). Вот C или измеряет D, или нет. Пусть сперва оно измеряет. Но и A, B измеряют D; значит, и A, B, C измеряют D. Вот я утверждаю, что ⟨оно⟩ и наименьшее. Действительно, если нет, то A, B, C измерят [какое-то] число, меньшее D. Пусть они измеряют E. Поскольку A, B, C измеряют E, то значит, и A, B измеряют E. И значит, наименьшее, измеряемое A, B, измерит [E] (предложение 35). Наименьшее же, измеряемое A, B, есть D; значит, D измерит E, большее — меньшее; это же невозможно. Значит, A, B, C не измерят никакого числа, меньшего чем D; значит, A, B, C наименьшее измеряют D.



Черт. 37.



Черт. 38.

Затем, пусть вот C не измеряет D, и возьмём (черт. 38) наименьшее измеряемое C, D число E (предложение 34). Поскольку A, B измеряют D, а D измеряет E, то значит, и A, B измеряют E. Также и C измеряет [E; и], значит, A, B, C измеряют E. Вот я утверждаю, что ⟨оно⟩ и наименьшее. Действительно, если нет, то A, B, C измерят какое-то ⟨число⟩, меньшее E. Пусть они измеряют I. Поскольку A, B, C измеряют I, то значит, и A, B измеряют I; и значит, наименьшее, измеряемое A, B, измерит I (предложение 35). Наименьшее же, измеряемое

A, B, есть D; значит, D измеряет I. Также и C измеряет I; значит, D, C измеряют I, так что и наименьшее измеряемое D, C измерит I. Наименьшее же, измеряемое D, C, есть E; значит, E измеряет I, большее— меньшее; это же невозможно. Значит, A, B, C не измерят никакого числа, меньшего чем E. Значит, E, будучи наименьшим, измеряется A, B, C, что и требовалось доказать.

Предложение 37

Если число измеряется каким-то числом, то измеряемое будет иметь часть соимённую) измеряющему.*

Черт. 39.

Пусть число A измеряется каким-то числом B; я утверждаю, что A имеет часть, соимённую с B (черт. 39).

Действительно, сколько раз B измеряет A, пусть столько единиц будет в C. Поскольку B измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в C, также и единица D измеряет число C по ⟨количеству⟩ единиц в нём, то, значит, равное ⟨число раз⟩ измеряют единица D число C и B — ⟨число⟩ A. Значит, перестановкой, равное ⟨число раз⟩ единица D измеряет число B и C — ⟨число⟩ A (предложение 15); значит, какой частью единица D будет от числа B, той же самой частью будет и C от A. Единица же D есть часть числа B, соимённая ему; значит, и C есть часть A, соимённая B; так что A имеет часть C, соимённую B, что и требовалось доказать.

Предложение 38

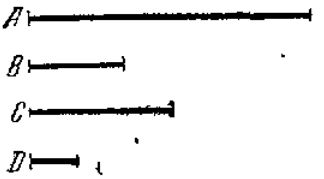
Если число имеет какую-нибудь часть, то оно будет измеряться числом, соимённым ⟨этой⟩ части.

Пусть число A имеет какую-нибудь часть B, и пусть соимённым части B будет [число] C; я утверждаю, что C измеряет A (черт. 40).

---

*) В подлиннике ὁμώνυμος — подобноимённый.

Действительно, поскольку B есть часть A, соимённая C, единица же D есть часть C, соимённая ему, то значит, какой частью будет единица D от числа C, той же самой частью будет и B от A; значит, равное ⟨число раз⟩ единица D измеряет число C и B — ⟨число⟩ A. Значит, перестановкой, равное ⟨число раз⟩ единица D измеряет число B и C — ⟨число⟩ A (предложение 15). Значит, C измеряет A, что и требовалось доказать.

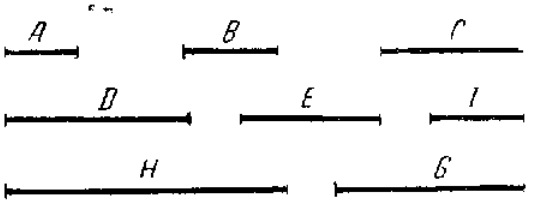


Черт. 40.

Предложение 39

Найти число, которое, будучи наименьшим, имеет заданные части.

Пусть заданные части будут A, B, C; требуется вот найти число, которое, будучи наименьшим, имеет части A, B, C (черт. 41).



Черт. 41.

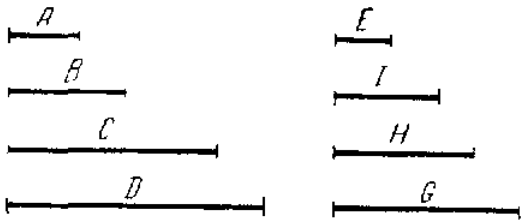
Пусть соимённые частям A, B, C числа будут D, E, I, и возьмём наименьшее, измеряемое D, E, I, число H. Значит, H имеет части, соимённые D, E, I (предложение 37). Соимённые же D, E, I части суть A, B, C; значит, H имеет части A, B, C. Вот я утверждаю, что ⟨оно их имеет⟩, будучи и наименьшим. Действительно, если нет, то будет какое-то меньшее H число, которое имеет части A, B, C. Пусть оно будет G. Поскольку G имеет части A, B C, то значит, G будет измеряться числами, соимёнными частями A, B, C (предложение 38). Частям же A, B, C соимённые числа будут D, E, I; значит, G измеряется D, E, I. И оно меньше H; это же невозможно. Значит, не будет никакого меньшего H числа, которое имело бы части A, B, C, что и требовалось доказать.

КНИГА ВОСЬМАЯ

Предложение 1

Если будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции, крайние же из них будут первыми между собой, то они – наименьшие из ⟨чисел⟩, имеющих с ними то же отношение.*

Пусть будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции A, B, C, D, крайние же из них A, D пусть будут первыми между собой; я утверждаю, что A, B, C, D — наименьшие из имеющих с ними то же отношение (черт. 1).



Черт. 1.

Действительно, если это не так, то пусть E, I, H, G будут числа меньшие, чем A, B, C, D, находящиеся с ними в том же отношении. И поскольку A, B, C, D находятся в том же отношении с E, I, H, G, и количество [чисел A, B, C, D] равно количеству [чисел E, I, H, G], то значит, по «равенству» (предложение 14 книги VII) будет, что как A к D, так и E к G. Но A, D первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же числа равно измеряют имеющие то же отношение, боль-

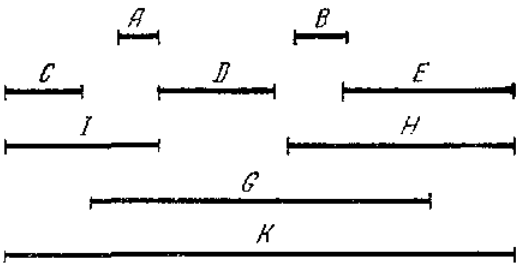
*) В подлиннике ἑξῆς ἀνάλογον — подряд пропорциональны. Эта терминология употребляется в предложениях 1, 2, 3, 4, 6, 7, 13, 14, 15, 18, 19, 21, 22, 23, 25.

шее — большее, меньшее же — меньшее (предложение 20 книги VII), то-есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее. Значит, A измеряет E, большее — меньшее; это же невозможно. Значит, E, I, H, G, будучи меньше A, B, C, D, не будут в том же отношении с ними. Значит, A, B, C, D — наименьшие из имеющих то же отношение с ними, что и требовалось доказать (1).

Предложение 2

Найти наименьшие числа в непрерывной пропорции, сколько бы их ни было назначено, в заданном отношении.

Пусть заданное отношение в наименьших числах будет как A к B; должно вот найти наименьшие числа в непрерывной пропорции, сколько бы их ни было назначено, в отношении A к B.



Черт. 2.

Вот пусть будет назначено четыре, и пусть A, умножая само себя, произведёт C, умножая же B, произведёт D, и ещё B, умножая само себя, произведёт E, и ещё A, умножая C, D, E, произведёт I, H, G, а B, умножая E, произведёт K (черт. 2).

И поскольку A, умножая само себя, произвело C, умножая же B, произвело D, то значит, будет, что как A к B, [так и] C к D (предложение 17 книги VII). Затем, поскольку A, умножая B, произвело D, а B, умножая само себя, произвело E, то значит, каждое из A, B, умножая B, произвели каждое из D, E. Значит, будет, что как A к B, так и D к E (предложение 18 книги VII). Но как A к B, так и C к D; и значит, как C к D, так и D к E. И поскольку A, умножая C, D, произвело I, H, то значит, будет как C к D, [так и] I к H (предложение 17 книги VII). Как же C к D, так было и A к B; и значит, как A к B, так и I к H. Затем, поскольку A, умножая D, E,

произвело H, G, то значит, будет как D к E, так и H к G (предложение 17 книги VII). Но как D к E, так и A к B. И значит, как A к B, так и H к G. И поскольку A, B, умножая E, произвели G, K, то значит, будет, что как A к B, так и G к K (предложение 18 книги VII). Но как A к B, так и I к H, и H к G. И значит, как I к H, так и H к G, и G к K; значит, C, D, E и I, H, G, K будут пропорциональными в отношении A к B. Вот я утверждаю, что они и наименьшие. Действительно, поскольку A, B суть наименьшие из имеющих то же отношение с ними, наименьшие же из имеющих то же отношение суть первые между собой (предложение 22 книги VII), то значит, A, B будут первыми между собой. И каждое из A, B, умножая само себя, произвело ⟨соответственно⟩ C, E, умножая же каждое из C, E, произвело ⟨соответственно⟩ I, K; значит, C, E и I, K будут первыми между собой (предложение 27 книги VII). Если же будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции, крайние же из них будут первыми между собой, то они — наименьшие из имеющих с ними то же отношение (предложение 1). Значит, C, D, E и I, H, G, K будут наименьшими из имеющих то же отношение с A, B, что и требовалось доказать (1).

Следствие

Из этого вот ясно, что если три числа в непрерывной пропорции являются наименьшими из имеющих с ними то же отношение, то крайние из них — квадраты, если же четыре, то — кубы.

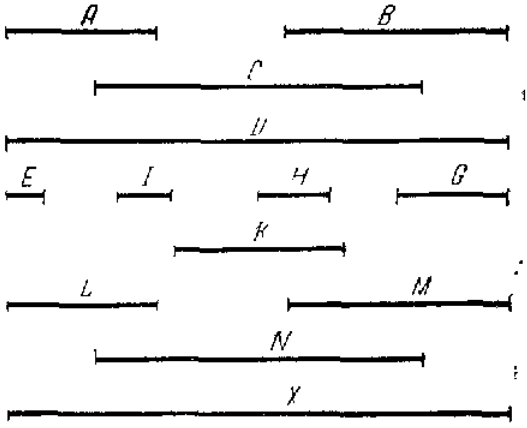
Предложение 3

Если будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции — наименьших из имеющих то же отношение с ними, -то крайние из них будут первыми между собой.

Пусть будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции — наименьших из имеющих с ними то же отношение, A, B, C, D; я утверждаю, что крайние из них A, D будут первыми между собой (черт. 3).

Действительно, возьмём два числа наименьших в отношении A, B, C, D, ⟨а именно⟩, E, I (предложение 33 книги VII), затем три H, G, K и так далее одним более (предложение 2), пока взятое количество не сделается равным количеству A, B, C, D. Пусть они взяты и будут L, M, N, X.

И поскольку E, I — наименьшие из имеющих то же отношение с ними, то они будут первыми между собой (предложение 22 книги VII). И поскольку каждое из E, I, умножая само себя, произвело H, K, умножая же каждое из H, K, произвело L, X, то значит, H, K и L, X будут первыми между собой (предложение 27 книги VII). И поскольку A, B, C, D — наименьшие из имеющих с ними то же отношение, также и L, M, N, X — наименьшие находящиеся в том самом отношении с A, B, C, D, и количество A, B, C, D одинаково с количеством L, M, N, X, то значит, каждое из A, B, C, D ⟨соответственно⟩ равно L, M, N, X; значит, A будет равно L, D же ⟨равно⟩ X. И L, X суть первые между собой. Значит, и A, D будут первыми между собой, что и требовалось доказать (1).



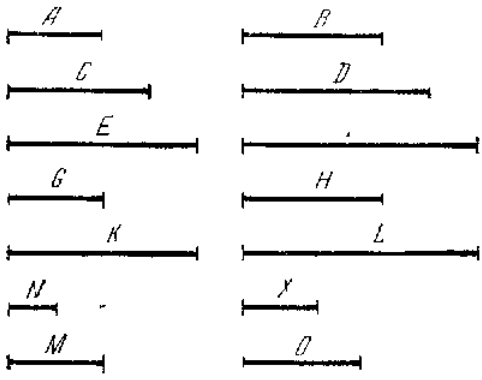
Черт. 3.

Предложение 4

Для любого количества отношений, заданных в наименьших числах, найти наименьшие непрерывно пропорциональные числа в заданных отношениях.

Пусть заданные отношения в наименьших числах будут — A к B и C к D, и ещё E к I; вот требуется найти наименьшие непрерывно пропорциональные числа в отношениях A к B и C к D, и ещё E к I (черт. 4).

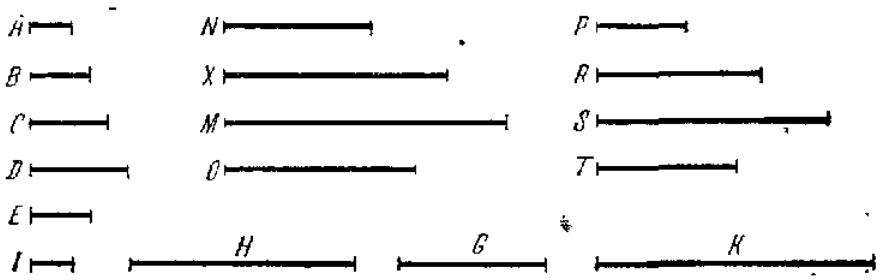
Действительно, возьмём наименьшее измеряемое B и C число H (предложение 34 книги VII). И сколько раз B измеряет H, столько же раз и A пусть измеряет G, сколько же раз C измеряет H, столько раз и D пусть измеряет K. Но E или измеряет K, или не измеряет. Пусть сначала оно измеряет. И сколько раз E измеряет K, пусть столько раз и I измеряет L. И поскольку одинаково A измеряет G и B ⟨измеряет⟩ H, то значит, будет, что как A к B, так и G к H (определение 21 и предложение 13 книги VII). На основании того же вот, и как C к D, так и H к K, и ещё как E к I, так и K к L; значит, G, H, K, L будут непрерывно пропорциональны в отношениях A к B и C к D и ещё E к I. Вот я утверждаю, что ⟨они⟩ и наименьшие. Действительно, если не будут G, H, K, L наименьшими непрерывно пропорциональными в отношениях A к B, и C к D, и E к I, то пусть такими будут N, X, M, O. И поскольку будет как A к B, так и N к X, и A, B — наименьшие, наименьшие же одинаковое число раз измеряют имеющие то же самое отношение, большее — большее и меньшее — меньшее, то-есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее (предложение 20 книги VII), то значит, B измеряет X. На основании вот того же и C измеряет X; значит, B, C измеряют X; и значит, наименьшее измеряемое B, C измерит X (предложение 35 книги VII). Но H наименьшее, измеряемое B, C; значит, H измеряет X, большее — меньшее; это же невозможно. Значит, не будет каких-нибудь, меньших чем G, H, K, L, чисел, непрерывно ⟨пропорциональных⟩ в отношениях A к B и C к D, и ещё E к I.



Черт. 4.

Но вот пусть E не измеряет K (черт. 5). И возьмём наименьшее измеряемое E, K число M (предложение 34

книги VII). И сколько раз K измеряет M, пусть столько раз и каждое из G, H измеряет ⟨соответственно⟩ N, X, сколько же раз E измеряет M, пусть столько раз и I измеряет O. Поскольку одинаковое число раз G измеряет N и H ⟨измеряет⟩ X, то значит, будет как G к H, так и N к X (предложение 13 книги VII). Как же G к H, так и A к B; и значит, как A к B, так и N к X. На основании того же вот, и как C к D, так и X к M. Затем, поскольку одинаковое число раз E измеряет M и I ⟨измеряет⟩ O, то значит, будет, что как E к I, так и M к O (предложение 13 книги VII); значит, N, X, M, O будут непрерывно пропорциональны в отношениях A к B и C к D, и ещё E



Черт. 5.

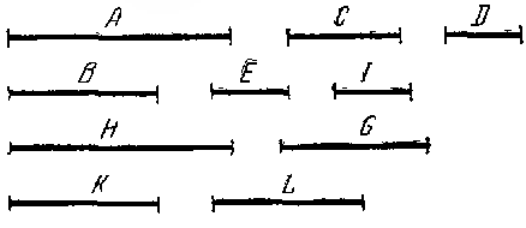
к I. Вот я утверждаю, что ⟨они⟩ и наименьшие в отношениях A ⟨к⟩ B, C ⟨к⟩ D, E ⟨к⟩ I. Действительно, если не так, то существуют некоторые, меньшие чем N, X, M, O числа, непрерывно пропорциональные в отношениях A ⟨к⟩ B, C ⟨к⟩ D, E ⟨к⟩ I. Пусть это будут P, R, S, T. И поскольку будет, что как P к R, так и A к B, и A, B суть наименьшие, наименьшие же одинаковое число раз измеряют имеющие то же отношение с ними, предыдущее — предыдущее и последующее — последующее (предложение 20 книги VII), то значит, B измеряет R. На том же вот основании и C измеряет R; значит, B, C измеряют R. И значит, наименьшее измеряемое B, C ⟨число⟩ измерит R (предложение 35 книги VII). Наименьшее же, измеряемое B, C, есть H; значит, H измеряет R. И будет, что как H к R, так и K к S; и значит, K измеряет S. Также и E

измеряет S (предложение 20 книги VII); значит, E, K измеряют S. И значит, наименьшее, измеряемое E, K, измерит S (предложение 35 книги VII). Наименьшее же, измеряемое E, K, есть M; значит, M измеряет S, большее — меньшее; это же невозможно. Значит, не существует никаких меньших N, X, M, O чисел, непрерывно пропорциональных в отношениях A к B и C к D, и ещё E к I; значит, N, X, M, O будут наименьшими непрерывно пропорциональными в отношениях A ⟨к⟩ B, C ⟨к⟩ D, E ⟨к⟩ I, что и требовалось доказать (I).

Предложение 5

Плоскостные числа имеют друг к другу отношение, составленное из отношений сторон.

Пусть будут плоскостные числа A, B, и пусть сторонами A будут числа C, D, ⟨сторонами⟩ же B — ⟨числа⟩ E, I; я утверждаю, что A имеет к B отношение, составленное из сторон (черт. 6).



Черт. 6.

Действительно, для данных отношений, которые имеют C к E и D к I, возьмём наименьшие непрерывно пропорциональные в отношениях C ⟨к⟩ E, D ⟨к⟩ I числа H, G, K так, чтобы было как C к E, так и H к G, как же D к I, так и G к K (предложение 4). И пусть D, умножая E, произведёт L.

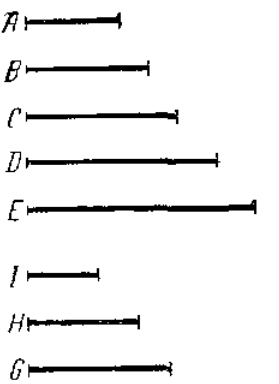
И поскольку D, умножая C, произвело A, умножая же E произвело L, то значит, будет, что как C к E, так и A к L (предложение 17 книги VII). Как же C к E, так и H к G; и, значит, как H к G, так и A к L. Затем, поскольку E, умножая D, произвело L (предложение 16 книги VII) и вместе с тем, умножая I, произвело B, то значит, будет, что как D к I, так и L к B (предложение 17 книги VII). Но как D к I, так и G к K; и зна-

чит, как G к K, так и L к B. Доказано же, что и как H к G, так и A к L; значит, «по равенству» будет (предложение 14 книги VII), что как H к K, [так и] A к B. Но H к K имеет отношение, составленное из ⟨отношений⟩ сторон; и значит, A имеет к B отношение, составленное из ⟨отношений⟩ сторон, что и требовалось доказать (2).

Предложение 6

Если будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции, первое же не измеряет второго, то и никакое другое не измерит никакого.

Пусть будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции A, B, C, D, E, пусть же A не измеряет B; я утверждаю, что и никакое другое не измерит никакого (черт. 7).

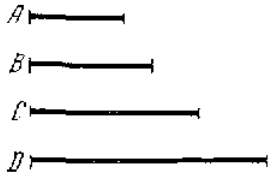


Черт. 7.

Теперь, что A, B, C, D, E последовательно друг друга не измеряют, очевидно; ибо A не измеряет B. Вот я утверждаю, что и никакое другое не измерит никакого. Действительно, если возможно, пусть A измеряет C. И сколько будет ⟨чисел⟩ A, B, C, столько возьмём наименьших, имеющих то же отношение с A, B, C, чисел I, H, G (предложение 33 книги VII). И поскольку I, H, G находятся в том же отношении с A, B, C, и количество A, B, C равно количеству I, H, G, то значит, «по равенству» (предложение 14 книги VII) будет, что как A к C, так и I к G. И поскольку будет, что как A к B, так и I к H, A же не измеряет B, то значит, и I не измеряет H (определение 21 книги VII); значит, I не будет единицей, ибо единица измеряет всякое число. И будут I, G первыми между собой (предложение 3), [значит, I не измеряет G]. И как I к G, так и A к C; значит, и A не измеряет C (определение 21 книги VII). Подобно вот докажем, что и никакое другое не измерит никакого, что и требовалось доказать (3).

Предложение 7

Если будет сколько-нибудь чисел в [непрерывной] пропорции, первое же измеряет последнее, то оно измерит и второе.



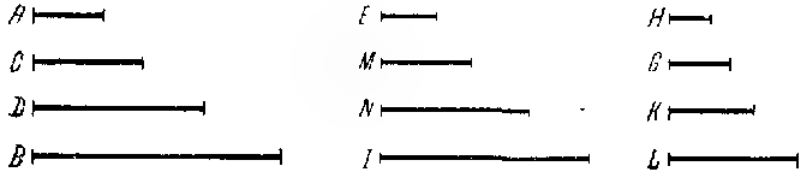
Черт. 8.

Пусть будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции A, B, C, D, пусть же A измеряет D; я утверждаю, что A измеряет и B (черт. 8).

Действительно, если A не измеряет B, то и никакое другое не измерит никакого (предложение 6); A же измеряет D. Значит, и A измеряет B, что и требовалось доказать.

Предложение 8

Если между двумя числами в непрерывной пропорции) попадают числа, то сколько чисел в непрерывной*



Черт. 9.

пропорции попало между ними, столько же в непрерывной пропорции попадёт и между ⟨числами⟩, имеющими [с ними] то же отношение (4).

Пусть между двумя числами A, B в непрерывной пропорции попадут числа C, D, и сделаем, чтобы как A к B, так и E к I; я утверждаю, что сколько чисел в непрерывной пропорции попало между A, B, столько же в непрерывной пропорции попадёт и между E, I (черт. 9).

Действительно, сколько будет по количеству ⟨чисел⟩ A, B, C, D, столько же возьмём наименьших, имеющих то же отношение с A, C, D, B чисел H, G, K, L (предло-

---

*) В подлиннике другой термин для непрерывной пропорции — κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον. Та же терминология в предложениях 9, 10, 25 (в последнем также и ἑξῆς ἀναλογον).

жение 33 книги VII); значит, крайние из них H, L будут первыми между собой (предложение 3). И поскольку A, C, D, B находятся с H, G, K, L в том же отношении, и количество A, C, D, B равно количеству H, G, K, L, то значит, «по равенству» (предложение 14 книги VII) будет, что как A к B, так и H к L. Как же A к B, так и E к I; и значит, как H к L, так и E к I. Но H, L — первые, первые же ⟨суть⟩ и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же числа одинаковое число раз измеряют имеющие то же отношение, большее — большее и меньшее — меньшее (предложение 20 книги VII), то-есть предыдущее — предыдущее и последующее — последующее. Значит, одинаковое число раз H измеряет E и L ⟨измеряет⟩ I. Вот сколько раз H измеряет E, пусть столько же раз и каждое из G, K будет измерять M, N; значит, H, G, K, L одинаковое число раз измеряют E, M, N, I. Значит, H, G, K, L находятся с E, M, N, I в том же отношении (определение 21 книги VII). Но H, G, K, L находятся с A, C, D, B в том же отношении; значит, и A, C, D, B будут в том же отношении с E, M, N, I. Но A, C, D, B находятся в непрерывной пропорции; значит, и E, M, N, I будут в непрерывной пропорции. Значит, сколько чисел в непрерывной пропорции попало между A, B, столько же чисел в непрерывной пропорции попало и между E, I, что и требовалось доказать.

Предложение 9

Если будут два числа, первых между собой, и между ними в непрерывной пропорции попадают числа, то сколько между ними в непрерывной пропорции попадает чисел, столько же попадёт в непрерывной пропорции между каждым из них и единицей.

Пусть будут два числа, первых между собой, A, B, и пусть между ними в непрерывной пропорции попадают C, D, и отложим E — единицу; я утверждаю, что сколько между A, B в непрерывной пропорции попадает чисел, столько же попадёт в непрерывной пропорции между каждым из A, B и единицей (черт. 10).

Действительно, возьмём два наименьших, находящихся в отношении A, C, D, B, числа I, H, затем три G, K, L, и так далее всё время одним больше, пока количество их не сделается равным количеству A, C, D, B (предложение 2). Пусть они взяты и будут M, N, X, O. Очевидно вот, что I, умножая само себя, произвело G, умножая же G, произвело M; и H, умножая себя, произвело L, умножая же L, произвело O (предложение 2, следствие). И поскольку M, N, X, O суть наименьшие из имеющих то же отношение с I, H, то и A, C, D, B будут наименьшими из имеющих то же отношение с I, H (предложение 3); и количество M, N, X, O равно количеству A, C, D, B, то

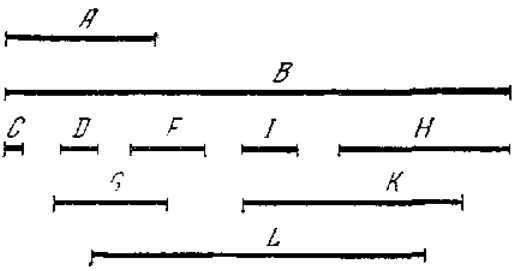
Черт. 10.

значит, каждое из M, N, X, O будет ⟨соответственно⟩ равно каждому из A, C, D, B; значит, M равно A, O же ⟨равно⟩ B. И поскольку I, умножая само себя, произвело G, то значит, I измеряет G по ⟨числу⟩ единиц в I (определение 16 книги VII). Также и единица E измеряет I по ⟨числу⟩ единиц в нём; значит, одинаковое число раз измеряют единица E число I и I — ⟨число⟩ G. Значит, будет, что как единица E к числу I, так и I к G. Затем, поскольку I, умножая G, произвело M, то значит, G измеряет M по ⟨числу⟩ единиц в I (определение 16 книги VII). Также и единица E измеряет число I по ⟨числу⟩ единиц в нём; значит, одинаковое число раз измеряют единица E число I, и G — ⟨число⟩ M. Значит, будет, что как единица E к числу I, так и G к M. Доказано же, что и как единица E к числу I, так и I к G; и значит, как единица E к числу I, так и I к G, и G к M. Но M равно A; зна-

чит, будет, что как единица E к числу I, так и I к G и G к A. На том же вот основании, и как единица E к числу H, так и H к L и L к B. Значит, сколько между A, B в непрерывной пропорции попало чисел, столько же чисел попало в непрерывной пропорции между каждым из A, B и единицей E, что и требовалось доказать.

Предложение 10

Если между каждым из двух чисел и единицей в непрерывной пропорции попадают числа, то сколько чисел в непрерывной пропорции попадёт между каждым из них и единицей, столько попадёт в непрерывной пропорции и между ними самими.



Черт. 11.

В самом деле, пусть между двумя числами A, B и единицей C в непрерывной пропорции попадают числа D, E, и I, H; я утверждаю, что сколько чисел в непрерывной пропорции попадёт между каждым из A, B и единицей C, столько попадёт в непрерывной пропорции и между A, B (черт. 11).

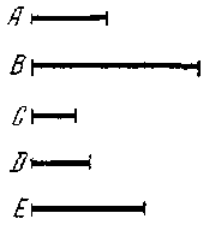
Действительно, пусть D, умножая I, произведёт G, каждое же из D, I, умножая G, произведёт ⟨соответственно⟩ K, L.

И поскольку будет, что как единица C к числу D, так и D к E, то значит, равное число раз единица C измеряет число D, и D ⟨измеряет⟩ E (определение 21 книги VII). Единица же C измеряет число D по ⟨числу⟩ единиц в D; и значит, число D измеряет E по ⟨числу⟩ единиц в D; значит, D, умножая само себя, произвело E. Затем, поскольку будет, что как [единица] C к числу D, так и E к A, то значит, равное число раз единица C измеряет число D, и E ⟨измеряет⟩ A. Единица же C измеряет число D по ⟨числу⟩ единиц в D; и значит, E измеряет A по ⟨числу⟩ единиц в D; значит, D, умножая E, произвело A. На том же вот основании и I, умножая само

себя, произвело H, умножая же H, произвело B. И поскольку D, умножая само себя, произвело E, умножая же I, произвело G, то значит, будет (предложение 17 книги VII), что как D к I, так и E к G. На том же вот основании, и как D к I, так и G к H (предложение 18 книги VII). И значит, как E к G, так и G к H. Затем, поскольку D, умножая каждое из E, G, произвело ⟨соответственно⟩ A, K, то значит, будет, что как E к G, так и A к K (предложение 17 книги VII). Но как E к G, так и D к I; и значит, как D к I, так и A к K. Затем, поскольку каждое из D, I, умножая G, произвело ⟨соответственно⟩ K, L, то значит, будет, что как D к I, так и K к L (предложение 18 книги VII). Но как D к I, так и A к K; и значит, как A к K, так и K к L. Далее, поскольку I, умножая каждое из G, H, произвело соответственно L, B, то значит, будет, что как G к H, так и L к B (предложение 17 книги VII). Как же G к H, так и D к I; и значит, как D к I, так и L к B. Доказано же, что и как D к I, так и A к K, и K к L; и значит, как A к K, так и K к L, и L к B. Значит, A, K, L, B будут последовательно в непрерывной пропорции. Значит, сколько между каждым из A, B и единицей C в непрерывной пропорции попадает чисел, столько же попадёт в непрерывной ⟨пропорции⟩ и между A, B, что и требовалось доказать.

Предложение 11

Для двух квадратных чисел существует одно среднее пропорциональное число, и квадрат к квадрату имеет двойное отношение стороны к стороне (5).



Черт. 12.

Пусть будут квадратные числа A, B, и пусть у A сторона будет C, у B же — D; я утверждаю, что для A, B существует одно среднее пропорциональное число и что A к B имеет двойное отношение C к D (черт. 12).

Действительно, пусть C, умножая D, произведёт E. И поскольку A — квадрат, стороной же его является C, то значит, C, умножая само себя, произвело A.

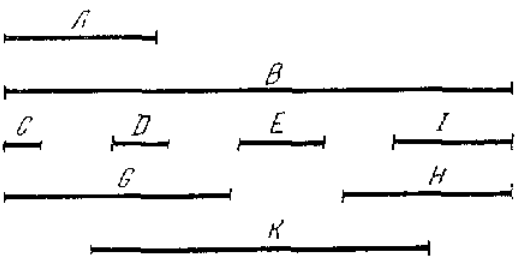
На том же вот основании и D, умножая само себя, произвело B. Поскольку теперь C, умножая каждое из C, D, произвело ⟨соответственно⟩ каждое из A, E, то значит, будет, что как C к D, так и A к E (предложение 17 книги VII). На том же вот основании и как C к D, так и E к B. И значит, как A к E, так и E к B. Значит, для A, B существует одно среднее пропорциональное число.

Вот я утверждаю, и что A к B имеет двойное отношение C к D. Действительно, поскольку есть три пропорциональных числа A, E, B, то значит, A имеет к B двойное отношение A к E. Как же A к E, так и C к D. Значит, A имеет к B двойное отношение стороны C к D, что и требовалось доказать.

Предложение 12

Для двух кубических чисел существуют два средних пропорциональных числа, и куб к кубу имеет тройное отношение стороны к стороне.

Пусть будут кубические числа A, B, и пусть у A сторона будет C, у B же — D; я утверждаю, что для A, B существуют два средних пропорциональных числа и что A имеет к B тройное отношение C к D (черт. 13).



Черт. 13.

Действительно, пусть C, умножая самого себя, произведёт E, умножая же D, произведёт I, D же, умножая само себя, произведёт H, каждое же из C, D, умножая I, произведёт ⟨соответственно⟩ G, K.

И поскольку A является кубом, сторона же его — C, и C, умножая само себя, произвело E, то значит, C, умножая само себя, произвело E, умножая же E, произвело A. На том же вот основании и D, умножая само себя, произвело H, умножая же H, произвело B. И поскольку C, умножая каждое из C, D, произвело ⟨соответственно⟩ E, I, то

значит, будет, что как C к D, так и E к I (предложение 17 книги VII). На том же вот основании и как C к D, так и I к H (предложение 18 книги VII). Затем, поскольку C, умножая каждое из E, I, произвело ⟨соответственно⟩ A, G, то значит, будет, что как E к I, так и A к G (предложение 17 книги VII). Как же E к I, так и C к D; и значит, как C к D, так и A к G. Затем, поскольку каждое из C, D, умножая I, произвело ⟨соответственно⟩ G, K, то значит, будет, что как C к D, так и G к K (предложение 18 книги VII). Затем, поскольку D, умножая каждое из I, H, произвело ⟨соответственно⟩ K, B, то значит, будет, что как I к H, так и K к B (предложение 17 книги VII). Как же I к H, так и C к D; и значит, как C к D, так и A к G, и G к K, и K к B. Значит, для A, B существуют два средних пропорциональных G, K.

Вот я утверждаю и что A имеет к B тройное отношение C к D. Действительно, поскольку есть четыре пропорциональных числа A, G, K, B, то значит, A имеет к B тройное отношение A к G. Как же A к G, так и C к D; и [значит] A к B имеет тройное отношение C к D, что и требовалось доказать.

Предложение 13

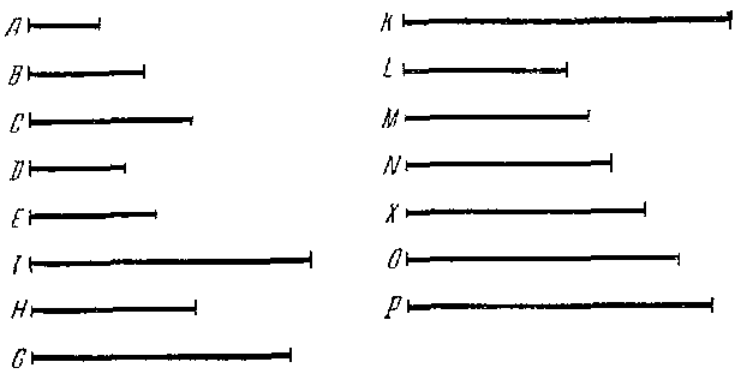
Если будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции и каждое, умножая само себя, производит что-то, то и возникающие из них будут пропорциональными, и если первоначальные, умножая возникшие, производят что-то, то и эти будут пропорциональными [и то же всегда будет происходить в дальнейшем].

Пусть будет сколько-нибудь чисел в непрерывной пропорции A, B, C, ⟨т. е.⟩ как A к B, так и B к C, и пусть A, B, C, умножая самих себя, произведут D, E, I, умножая же D, E, I, произведут H, G, K; я утверждаю, что D, E, I и H, G, K будут в непрерывной пропорции (черт. 14).

Действительно, пусть A, умножая B, произведёт L, каждое же из A, B, умножая L, произведёт ⟨соответственно⟩ M, N. И далее, пусть B, умножая C, произве-

дёт X, каждое же из B, C, умножая X, произведёт ⟨соответственно⟩ O, P.

Подобно вот тому, как выше, докажем, что D, L, E и H, M, N, G будут в непрерывной пропорции в отношении A к B, и что ещё E, X, I и G, O, P, K будут в непрерывной пропорции в отношении B к C. И будет, что



Черт. 14.

как A к B, так и B к C; и значит, D, L, E будут с E, X, I в том же самом отношении, и ещё H, M, N, G с G, O, P, K. И количество D, L, E равно количеству E, X, L, ⟨количество же⟩ H, M, N, G — ⟨количеству⟩ G, O, P, K; значит, «по равенству» будет, что как D к E, так и E к I, как же H к G, так и G к K (предложение 14 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 14

Если квадрат измеряет квадрат, то и сторона измерит сторону; и если сторона измеряет сторону, то и квадрат измерит квадрат (6).

Пусть будут квадратные числа A, B, стороны же их пусть будут C, D, и пусть A измеряет B; я утверждаю, что и C измеряет D (черт. 15).

Действительно, пусть C, умножая D, произведёт E; значит, A, E, B будут в непрерывной пропорции в отношении C к D (предложение 11). И поскольку A, E, B

находятся в непрерывной пропорции, и A измеряет B, то значит, и A измеряет E (предложение 7). И будет как A к E, так и C к D; значит, C измеряет D (определение 21 книги VII).

Черт. 15.

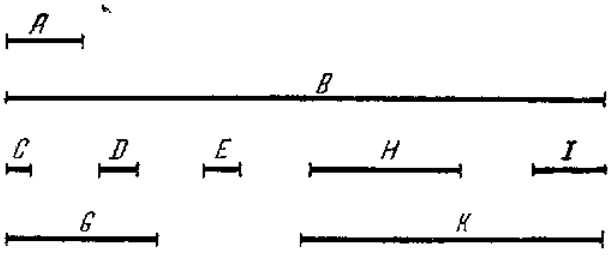
Затем вот пусть C измеряет D; я утверждаю, что и A измеряет B.

Действительно, произведя те же самые построения, подобно докажем, что A, E, B будут в непрерывной пропорции в отношении C к D. И поскольку будет, что как C к D, так и A к E, C же измеряет D, то значит, и A измеряет E (определение 21 книги VII). И A, E, B в непрерывной пропорции; значит, и A измеряет B.

Итак, если квадрат измеряет квадрат, то и сторона измерит сторону; и если сторона измеряет сторону, то и квадрат измерит квадрат, что и требовалось доказать.

Предложение 15

Если кубическое число измеряет кубическое число, то и сторона измерит сторону; и если сторона измеряет сторону, то и куб измерит куб.



Черт. 16.

Пусть кубическое число A измеряет кубическое B, и пусть у A сторона C, у B же — D; я утверждаю, что C измеряет D (черт. 16).

Действительно, пусть C, умножая само себя, произведёт E, D же, умножая само себя, произведёт H, и ещё C,

умножая D, [произведёт] I, каждое же из C, D, умножая I, произведёт ⟨соответственно⟩ G, K. Очевидно, вот, что E, I, H и A, G, K, B будут в непрерывной пропорции в отношении C к D (предложение 12). И поскольку A, G, K, B находятся в непрерывной пропорции, и A измеряет B, то оно, значит, измеряет и G (предложение 7). И будет, что как A к G, так и C к D; значит, и C измеряет D.

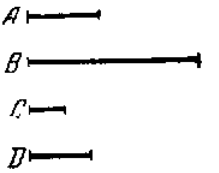
Но вот пусть C измеряет D; я утверждаю, что и A будет измерять B.

Действительно, произведя те же самые построения, подобно вот докажем, что A, G, K, B будут в непрерывной пропорции в отношении C к D. И поскольку C измеряет D, и будет, что как C к D, так и A к G, то значит, и A измеряет G, так что и A измеряет B, что и требовалось доказать.

Предложение 16

Если квадратное число не измеряет квадратного числа, то и сторона не измерит стороны; и если сторона не измеряет стороны, то и квадрат не измерит квадрата.

Пусть будут квадратные числа A, B, стороны же их пусть будут C, D, и пусть A не измеряет B; я утверждаю, что и C не измеряет D (черт. 17).



Черт. 17.

Действительно, если C измеряет D, то и A измерит B (предложение 14). Но A не измеряет B; значит, и C не измерит D.

[Вот] затем пусть C не измеряет D; я утверждаю, что и A не измерит B.

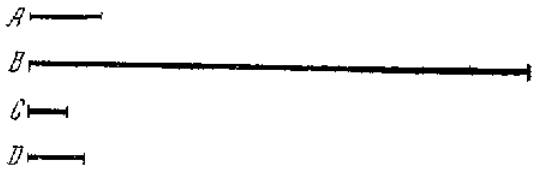
Действительно, если A измеряет B, то и C измерит D (предложение 14). Но C не измеряет D; значит, и A не измерит B, что и требовалось доказать.

Предложение 17

Если кубическое число не измеряет кубического числа, то и сторона не измерит стороны; и если сторона не измеряет стороны, то и куб не измерит куба.

Пусть кубическое число A не измеряет кубического числа B, и у A сторона пусть будет C, у B же D; я утверждаю, что C не измерит D (черт. 18).

Действительно, если C измеряет D, то и A измерит B (предложение 15). Но A не измеряет B; значит, и C не измеряет D.



Черт. 18.

Но вот пусть C не измеряет D; я утверждаю, что и A не измерит B.

Действительно, если A измеряет B, то и C измерит D (предложение 17). Но C не измеряет D; значит, и A не измерит B, что и требовалось доказать.

Предложение 18

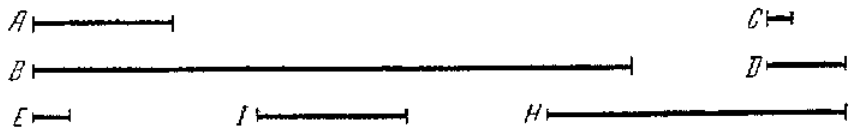
*Для двух подобных плоскостных чисел существует одно среднее пропорциональное число; и плоскостное ⟨число⟩ *) к плоскостному имеет двойное отношение сходственной стороны к сходственной стороне* (7).

Пусть два подобных плоскостных числа будут A, B, и у A пусть сторонами будут числа C, D, у B же — E, I. И поскольку подобными плоскостными ⟨числами⟩ являются имеющие пропорциональными стороны (определение 22 книги VII), то значит, будет, что как C к D, так и E к I. Я утверждаю теперь, что для A, B существует одно среднее пропорциональное число и что A к B имеет двойное отношение C к E, или D к I, то-есть сходственной стороны к сходственной [стороне] (черт. 19).

И поскольку будет, что как C к D, так и E к I, то значит, «перестановкой» (предложение 13 книги VII) будет,

*) В подлиннике стоит просто ἐπίπεδος — плоское.

что как C к E, так и D к I. И поскольку A является плоскостным, стороны же его C, D, то значит, D, умножая C, произвело A. На том же вот основании и E, умножая I, произвело B. Вот пусть D, умножая E, произведёт H. И поскольку D, умножая C, произвело A, умножая же E, произвело H, то значит, будет, что как C к E, так и A к H. Но как C к E, [так и] D к I; и значит, как D к I, так и A к H. Затем, поскольку E, умножая D, произвело H, умножая же I, произвело B, то значит, будет, что как D



Черт. 19.

к I, так и H к B (предложение 17 книги VII). Доказано же, что как D к I, так и A к H; и значит, как A к H, так и H к B. Значит, A, H, B будут в непрерывной пропорции. Значит, для A, B существует одно среднее пропорциональное число.

Вот я утверждаю, что и A к B имеет двойное отношение сходственной стороны к сходственной стороне, то-есть C к E или D к I. Действительно, поскольку A, H, B находятся в непрерывной пропорции, то A имеет к B двойное отношение ⟨A⟩ к H. И будет как A к H, так и C к E, и D к I. И значит, A имеет к B двойное отношение C к E или D к I, что и требовалось доказать.

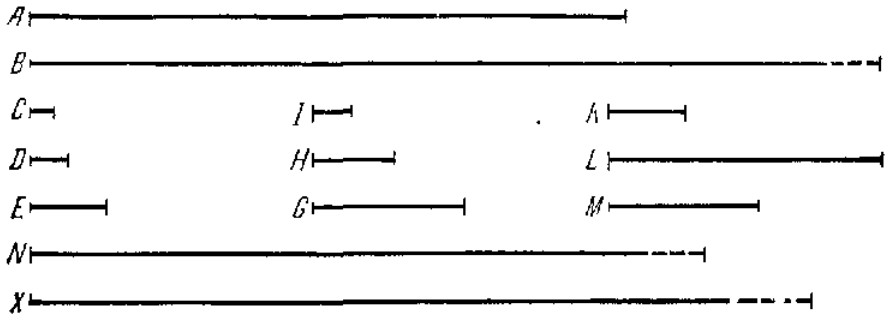
Предложение 19

Между двумя подобными телесными числами попадают два средних пропорциональных числа; и телесное ⟨число⟩ к подобному телесному имеет тройное отношение сходственной стороны к сходственной стороне.

Пусть два подобных телесных ⟨числа⟩ будут A, B, и у A стороны пусть будут C, D, E, у B же I, H, G. И поскольку подобными телесными ⟨числами⟩ являются имеющие сходственные стороны пропорциональными (опре-

деление 22 книги VII), то значит, будет, что как C к D, так и I к H, как же D к E, так и H к G. Я утверждаю, что между A, B попадают два средних пропорциональных числа, и что A к B имеет тройное отношение C к I и D к H, и ещё E к G (черт. 20).

Действительно, пусть C, умножая D, произведёт K, а I, умножая H, произведёт L. И поскольку C, D с I, H будут в том же самом отношении и ⟨произведение⟩ из C, D будет K, из I, H же L*), то [значит] K, L будут подобными



Черт. 20.

плоскостными числами (определение 22 книги VII); значит, для K, L существует одно среднее пропорциональное число (предложение 18). Пусть оно будет M. Значит, M будет ⟨произведение⟩ из D, I, как доказано в предшествующем предложении. И поскольку D, умножая C, произвело K, умножая же I, произвело M, то значит, будет, что как C к I, так и K к M (предложение 17 книги VII). Но как K к M, ⟨так и⟩ M к L. Значит, K, M, L будут в непрерывной пропорции в отношении C к I. И поскольку будет, что как C к D, так и I к H, то значит, «перестановкой» (предложение 13 книги VII) будет, что как C к I, так и D к H. На том же вот основании и как D к H, так и E к G. Значит, K, M, L будут в непрерывной пропорции

*) В подлиннике сокращённая формулировка «ἐκ τῶν Γ,Δ» — «из C, D», подразумевается «произведение». В геометрических книгах употребляется термин «ὑπὸ τῶν Γ,Δ», подразумевается περιεχόμενον — заключающееся, содержащееся между C, D.

в отношении C к I, и D к H, и ещё E к G. Вот пусть каждое из E, G, умножая M, произведёт ⟨соответственно⟩ N, X. И поскольку A есть телесное ⟨число⟩, стороны же его суть C, D, E, то значит, E, умножая ⟨произведение⟩ из C, D, произвело A. ⟨Произведение⟩ же из C, D есть K; значит, E, умножая K, произвело A. На том же вот основании и G, умножая L, произвело B. И поскольку E, умножая K, произвело A, и вместе с тем, умножая M, произвело N, то значит, будет, что как K к M, так и A к N (предложение 17 книги VII). Как же K к M, так и C к I и D к H, и ещё E к G; и значит, как C к I, и D к H, и E к G, так и A к N.

Затем, поскольку каждое из E, G, умножая M, произвело ⟨соответственно⟩ N, X, то значит, будет, что как E к G, так и N к X (предложение 18 книги VII). Но как E к G, так и C к I, и D к H; и значит, как C к I, и D к H, и E к G, так и A к N, и N к X. Затем, поскольку G, умножая M, произвело X и вместе с тем, умножая L, произвело B, то значит, будет, что как M к L, так и X к B (предложение 17 книги VII). Но как M к L, так и C к I, и D к H, и E к G. И, значит, как C к I, и D к H, и E к G, так и не только X к B, но и A к N, и N к X. Значит, A, N, X, B будут в непрерывной пропорции в упомянутых отношениях сторон.

Я утверждаю, что и A к B имеет тройное отношение сходственной стороны к сходственной стороне, то-есть числа C к I или D к H и ещё E к G. Действительно, поскольку имеются четыре числа в непрерывной пропорции A, N, X, B, то значит, A к B имеет тройное отношение A к N. Но как A к N, так доказано, что и C к I, и D к H, и ещё E к G. И значит, A к B имеет тройное отношение сходственной стороны к сходственной стороне, то-есть числа C к I, и D к H, и ещё E к G, что и требовалось доказать.

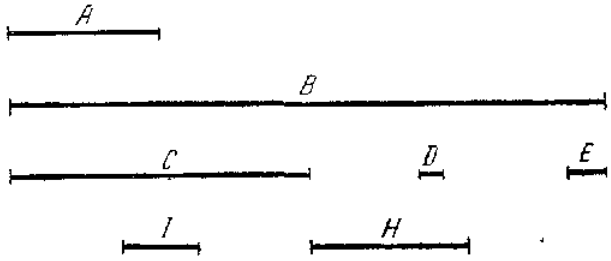
Предложение 20

Если между двумя числами попадает одно среднее пропорциональное число, то ⟨эти⟩ числа будут подобными плоскостными.

Пусть между двумя числами A, B попадает одно среднее пропорциональное число C; я утверждаю, что A, B будут подобными плоскостными числами (черт. 21).

[Действительно], возьмём наименьшие из имеющих то же отношение с A, C числа D, E (предложение 33 книги VII); значит, равное число раз D измеряет A и E ⟨измеряет⟩ C (предложение 20 книги VII).

Тогда сколько раз D измеряет A, пусть столько единиц будет в I; значит, I, умножая D, произвело A (определение 16 книги VII). Таким образом, A будет плоскостным ⟨числом⟩, стороны же его D, I. Затем, поскольку D, E



Черт. 21.

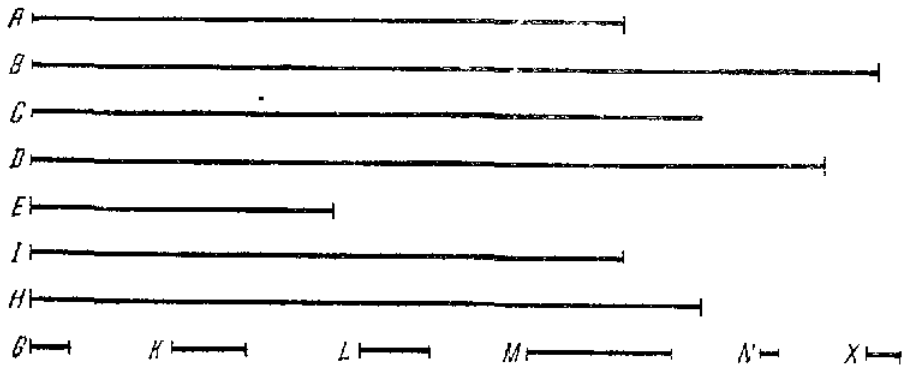
являются наименьшими из имеющих то же отношение с C, B, то значит, равное число раз D измеряет C и E ⟨измеряет⟩ B (предложение 20 книги VII). Тогда сколько раз E измеряет B, пусть столько единиц будет в H. Значит, E измеряет B по ⟨числу⟩ единиц в H; значит H, умножая E, произвело B (определение 16 книги VII). Значит, B есть плоскостное ⟨число⟩, стороны же его суть E, H. Значит, A, B будут плоскостными числами. Вот я утверждаю, что ⟨они будут⟩ и подобными. Действительно, поскольку I, умножая D, произвело A, умножая же E, произвело C, то значит, будет, что как D к E, так и A к C, то-есть как C к B. Затем, поскольку E, умножая каждое из I, H, произвело C, B, то значит, будет, что как I к H, так и C к B (предложение 17 книги VII). Как же C к B, так и D к E; и значит, как D к E, так и I к H. И «перестановкой», как D к I, так и E к H (предложение 13 книги VII). Значит, A, B будут подобными плоскостными числами, ибо стороны их пропорциональны (определение 22 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 21

Если между двумя числами попадают два средних пропорциональных числа, то ⟨эти⟩ числа будут подобными телесными.

Пусть между двумя числами A, B попадают два средних пропорциональных числа C, D; я утверждаю, что A, B будут подобными телесными (черт. 22).

Действительно, возьмём наименьшие из имеющих то же отношение с A, C, D три числа E, I, H (предложение 2);



Черт. 22.

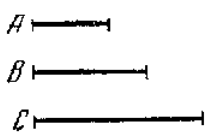
значит, крайние из них E, H будут первыми между собой (предложение 3). И поскольку между E, H попало одно среднее пропорциональное число I, то значит, E, H будут подобными плоскостными числами (предложение 20). Пусть теперь у E стороны будут G, K, у H же L, M. Значит, из предыдущего ясно, что E, I, H будут в непрерывной пропорции в отношении G к L и K к M. И поскольку E, I, H — наименьшие из имеющих то же отношение с A, C, D, и количество E, I, H равно количеству A, C, D, то значит, «по равенству» будет, что как E к H, так и A к D, (предложение 14 книги VII). Но E, H — первые, первые же и наименьшие, наименьшие же измеряют имеющие то же отношение с ними равное число раз, большее — большее, меньшее же — меньшее, то-есть предыдущее — предыдущее, и последующее — последующее (предложение 20

книги VII); значит, одинаковое число раз E измеряет A и H ⟨измеряет⟩ D. Тогда, сколько раз E измеряет A, пусть столько единиц будет в N. Значит, N, умножая E, произвело A (определение 16 книги VII). Но E есть ⟨произведение⟩ из G, K; значит, N, умножая ⟨произведение⟩ из G, K, произвело A. Значит, A будет телесным ⟨числом⟩, стороны же его будут G, K, N. Затем, поскольку E, I, H будут наименьшими из имеющих то же отношение с C, D, B, то значит, одинаковое число раз E измеряет C и H ⟨измеряет⟩ B (предложение 20 книги VII). Тогда сколько раз E измеряет C, пусть столько единиц будет в X. Значит, H измеряет B по ⟨числу⟩ единиц в X; значит, X, умножая H, произвело B. Но H есть ⟨произведение⟩ из L, M; значит, X, умножая ⟨произведение⟩ из L, M, произвело B. Значит, B будет телесным ⟨числом⟩, стороны же его будут L, M, X; значит, A, B будут телесными.

[Вот] я утверждаю, что ⟨они будут⟩ и подобными. Действительно, поскольку N, X, умножая E, произвели A, C, то значит, будет, что как N к X, ⟨так и⟩ A к C, то-есть E к I (предложение 18 книги VII). Но как E к I, ⟨так⟩ G к L и K к M; и значит, как G к L, так и K к M и N к X. И G, K, N суть стороны A, а X, L, M — стороны B. Значит, A, B будут подобными телесными числами (определение 22 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 22

Если три числа будут в непрерывной пропорции, первое же из них квадрат, то и третье будет квадратом.



Черт. 23.

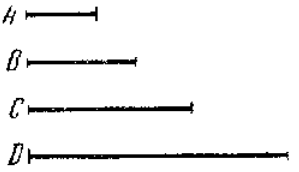
Пусть будут три числа в непрерывной пропорции A, B, C, первое же A пусть будет квадратом; я утверждаю, что и третье C есть квадрат (черт. 23).

Действительно, поскольку для A, C существует одно среднее пропорциональное число B, то значит, A, C — подобные плоскостные ⟨числа⟩ (предложение 20) Но A квадрат, значит, и C квадрат, что и требовалось доказать.

Предложение 23

Если четыре числа будут в непрерывной пропорции, первое же из них куб, то и четвёртое будет кубом.

Пусть будут четыре числа в непрерывной пропорции A, B, C, D, и пусть A будет кубом; я утверждаю, что и D есть куб (черт. 24).

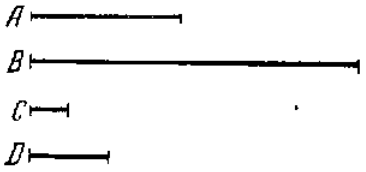


Черт. 24.

Действительно, поскольку для A, D существуют два средних пропорциональных числа B, C, то значит, A, D будут подобными телесными числами (предложение 21). Но A куб; значит, и D куб, что и требовалось доказать.

Предложение 24

Если два числа между собой имеют отношение, как квадратное число к квадратному числу, первое же есть квадрат, то и второе будет квадратом.



Черт. 25.

Пусть два числа A, B между собой будут иметь отношение, как квадратное число C к квадратному числу D, A же пусть будет квадратом; я утверждаю, что и B квадрат (черт. 25).

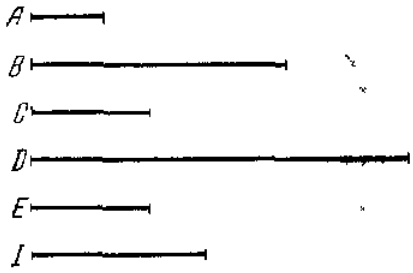
Действительно, поскольку C, D квадраты, то значит, C, D будут подобными плоскостными ⟨числами⟩. Значит, между C, D попадает одно среднее пропорциональное число (предложение 18). И будет как C к D, так и A к B; и значит, между A, B попадает одно среднее пропорциональное число (предложение 8). И A есть квадрат; значит, и B есть квадрат (предложение 22), что и требовалось доказать.

Предложение 25

Если два числа между собой имеют отношение, как кубическое число к кубическому числу, первое же есть куб, то и второе будет кубом.

Пусть два числа A, B между собой будут иметь отношение, как кубическое число C к кубическому числу D, A же пусть будет кубом; [вот] я утверждаю, что и B есть куб (черт. 26).

Действительно, поскольку C, D — кубы, то C, D будут подобными телесными ⟨числами⟩; значит, между C, D попадают два средних пропорциональных числа (предложение 19). Сколько же между C, D в непрерывной пропорции попадает чисел, столько же ⟨попадёт⟩ и между имеющими с ними то же отношение (предложение 8); так что и между A, B попадут два средних пропорциональных числа. Пусть попадут E, I. Поскольку теперь четыре числа A, E, I, B будут в непрерывной пропорции, и A есть куб, то значит, и B куб (предложение 23), что и требовалось доказать.



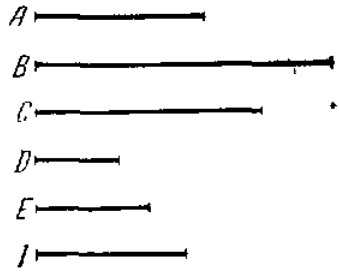
Черт. 26

Предложение 26

Подобные плоскостные числа между собой имеют отношение, как квадратное число к квадратному числу.

Пусть будут подобные плоскостные числа A, B; я утверждаю, что A к B имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу (черт. 27).

Действительно, поскольку A, B — подобные плоскостные ⟨числа⟩, то значит, между A, B попадает одно среднее пропорциональное число (предложение 18). Пусть оно попадёт и будет C, и возьмём наименьшие из имеющих то же отношение с A, C, B числа D, E, I (предложение 2); значит, крайние из них D, I будут квадраты (предложение 2, следствие).



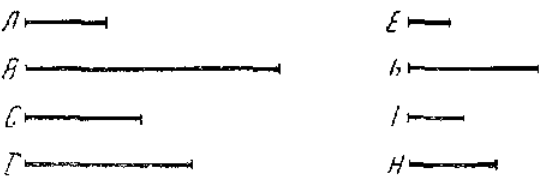
Черт. 27.

И поскольку будет, что как D к I, так и A к B, и D, I суть квадраты, то значит, A имеет к B отношение, как квадратное число к квадратному числу, что и требовалось доказать.

Предложение 27

Подобные телесные числа между собой имеют отношение, как кубическое число к кубическому числу.

Пусть будут подобные телесные числа A, B; я утверждаю, что A к B имеет отношение, как кубическое число к кубическому числу (черт. 28).



Черт. 28.

Действительно, поскольку A, B — подобные телесные ⟨числа⟩, то значит, между A, B попадают два средних пропорциональных числа (предложение 19). Пусть попадут C, D, и возьмём наименьшие из имеющих то же отношение с A, C, D, B числа в равном с ними количестве E, I, H, G (предложение 2); значит, крайние из E, G будут кубы (предложение 2, следствие). И будет, что как E к G, так и A к B; и значит, A имеет к B отношение, как кубическое число к кубическому числу, что и требовалось доказать (8).

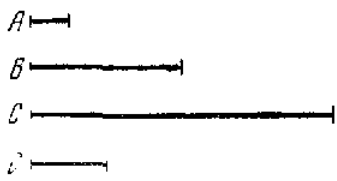
КНИГА ДЕВЯТАЯ

Предложение 1

Если два подобных плоскостных числа, умножая друг друга, производят что-то, то возникающее будет квадратом (1).

Пусть будут два подобных плоскостных числа A, B, и пусть A, умножая B, произведёт C; я утверждаю, что C есть квадрат (черт. 1).

Действительно, пусть A, умножая само себя, произведёт D. Значит, D есть квадрат. Поскольку теперь A, умножая само себя, произвело D, умножая же B, произвело C, то значит, будет, что как A к B, так и D к C (предложение 17 книги VII). И поскольку A, B суть подобные плоскостные числа, то значит, между A, B попадает одно среднее пропорциональное число (предложение 18 книги VIII) Если же между двумя числами по непрерывной пропорции*) попадают числа, то сколько попадает между ними, столько же ⟨будет⟩ и между ⟨числами⟩, имеющими то же отношение (предложение 8 книги VIII); так что и между D, C попадает одно среднее пропорциональное число. И D есть квадрат; значит, и C квадрат (предложение 22 книги VIII), что и требовалось доказать.



Черт. 1.

---

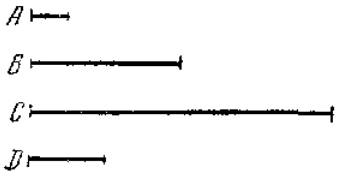
*) Тот же самый термин κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον, который встречался в предложении 8 и следующих предложениях книги VIII.

Предложение 2

Если два числа, умножая друг друга, производят квадрат, то они суть подобные плоскостные числа.

Пусть будут два числа A, B, и пусть A, умножая B, произведёт квадрат C; я утверждаю, что A, B суть подобные плоскостные числа (черт. 2).

Действительно, пусть A, умножая само себя, произведёт, D; значит, D есть квадрат. И поскольку A, умножая само себя, произвело D, умножая же B, произвело C, то значит, будет, что как A к B, так и D к C (предложение 17 книги VII). И поскольку D есть квадрат, а также и C ⟨квадрат⟩, то значит, D, C суть подобные плоскостные ⟨числа⟩. Значит, между D, C попадает одно среднее пропорциональное (предложение 18 книги VIII). И как D к C, так и A к B; и значит, между A, B попадает одно среднее пропорциональное (предложение 8 книги VIII). Если же между двумя числами попадает одно среднее пропорциональное, то [эти] числа суть подобные плоскостные (предложение 20 книги VIII); значит, A, B суть подобные плоскостные, что и требовалось доказать.

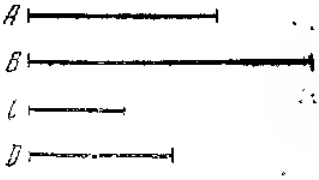


Черт. 2.

Предложение 3

Если кубическое число, умножая само себя, производит что-то, то возникающее будет кубом.

Пусть кубическое число A, умножая само себя, произведёт B; я утверждаю, что B есть куб (черт. 3).



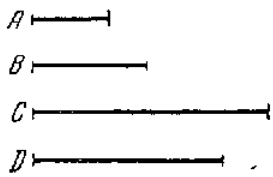
Черт. 3.

Действительно, возьмём ⟨от⟩ A сторону C, и пусть C, умножая само себя, произведёт D. Тогда, очевидно, будет, что C, умножая D, произвело A. И поскольку C, умножая само себя, произвело D, то значит, C измеряет D по ⟨числу⟩

своих единиц (определение 16 книги VII). Но также и единица измеряет C по ⟨числу⟩ его единиц; значит, будет (определение 21 книги VII), что как единица к C, так и C к D. Затем, поскольку C, умножая D, произвело A, то значит, D измеряет A по ⟨числу⟩ единиц в C. Также и единица измеряет C по ⟨числу⟩ его единиц; значит, будет, что как единица к C, так и D к A. Но как единица к C, так и C к D; и значит, как единица к C, так и C к D, и D к A. Значит, между единицей и числом A попали по непрерывной (κατὰ τὸ συνεχές) два средних пропорциональных числа C, D. Затем, поскольку A, умножая само себя, произвело B, то значит, A измеряет B по ⟨числу⟩ своих единиц; также и единица измеряет A по ⟨числу⟩ его единиц; значит, будет, что как единица к A, так и A к B. Между единицей же и A попали два средних пропорциональных числа; значит, и между A, B попадут два средних пропорциональных числа (предложение 8 книги VIII). Если же между двумя числами*) попадают два средних пропорциональных, первое же есть куб, то и второе будет кубом (предложение 23 книги VIII). И A есть куб; значит, и B есть куб, что и требовалось доказать.

Предложение 4

Если кубическое число, умножая кубическое число, производит что-то, то возникающее будет кубом.



Черт. 4.

Пусть кубическое число A, умножая кубическое число B, произведёт C; я утверждаю, что C есть куб (черт. 4).

Действительно, пусть A, умножая само себя, произведёт D; значит, D будет кубом (предложение 3). И поскольку A, умножая само себя, произвело D, умножая же B, произвело C, то значит, будет, что как A к B, так и D к C (предложение 17 книги VII). И поскольку A, B — кубы, то A, B будут подобными те-

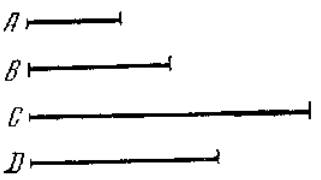
*) Интересно, что единица таким образом признаётся *числом*.

лесными ⟨числами⟩. Значит, между A, B попадают два средних пропорциональных числа (предложение 19 книги VIII); так что и между D, C попадут два средних пропорциональных числа (предложение 8 книги VIII). И D есть куб, значит, и C куб (предложение 23 книги VIII), что и требовалось доказать (2).

Предложение 5

Если кубическое число, умножая некоторое число, производит куб, то и умноженное число будет кубом.

Пусть кубическое число A, умножая некоторое число B, произведёт куб C; я утверждаю, что B есть куб (черт. 5).



Черт. 5.

Действительно, пусть A, умножая само себя, произведёт D; значит, D будет кубом (предложение 3). И поскольку A, умножая само себя, произвело D, умножая же B, произвело C, то значит, будет, что как A к B, так и D к C (предложение 17 книги VII). И поскольку D, C кубы, они подобные телесные. Значит, между D, C попадают два средних пропорциональных числа (предложение 19 книги VIII). И будет, что как D к C, так и A к B; и значит, между A, B попадают два средних пропорциональных числа (предложение 8 книги VIII). И A есть куб; значит, и B будет кубом (предложение 23 книги VIII), что и требовалось доказать.

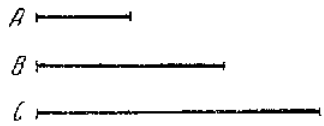
Предложение 6

Если число, умножая само себя, производит куб, то и само будет кубом.

Пусть число A, умножая само себя, произведёт куб B; я утверждаю, что и A есть куб (черт. 6).

Действительно, пусть A, умножая B, произведёт C. Поскольку теперь A, умножая себя, произвело B, умножая же B, произвело C, то значит, C есть куб. И поскольку A, умножая само себя, произвело B, то значит, A измеряет B

по ⟨числу⟩ своих единиц. Также и единица измеряет A по ⟨числу⟩ его единиц. Значит, будет, что как единица к A, так и A к B. И поскольку A, умножая B, произвело C, то значит, B измеряет C по ⟨числу⟩ единиц в A. Также и единица измеряет A по ⟨числу⟩ его единиц. Значит, будет, что как единица к A, так и B к C. Но как единица к A, так и A к B; и значит, как A к B, так и B к C. И поскольку B, C — кубы, они подобные телесные. Значит, для B, C существуют два средних пропорциональных числа (предложение 19 книги VIII). И будет, что как B к C, так и A к B. И значит, для A, B существуют два средних пропорциональных числа (предложение 8 книги VIII). И B есть куб, значит, и A будет кубом, что и требовалось доказать.

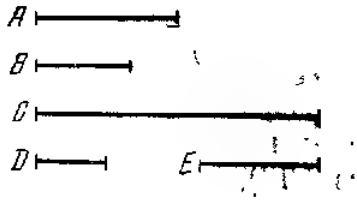


Черт. 6.

Предложение 7

Если составное число, умножая некоторое число, производит что-то, то возникающее будет телесным.

Пусть составное число A, умножая некоторое число B, произведёт C; я утверждаю, что C есть телесное (черт. 7).



Черт. 7.

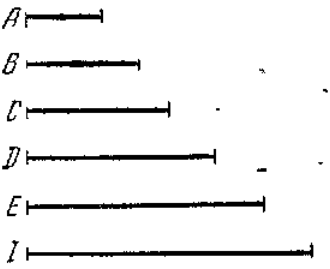
Действительно, поскольку A составное, то оно будет измеряться некоторым числом. Пусть оно будет измеряться ⟨числом⟩ D, и сколько раз D измеряет A, пусть столько единиц будет в E. Поскольку теперь D измеряет A по ⟨числу⟩ единиц в E, то значит, E, умножая D, произвело A (определение 16 книги VII). И поскольку A, умножая B, произвело C, A же есть ⟨произведение⟩ из D, E*), то значит, ⟨произведение⟩ из D, E, умножая B, произвело C; значит, C будет телесным, стороны же его будут D, E, B, что и требовалось доказать.

*) В подлиннике просто ὁ ἐκ τῶν D, E — ⟨то, что⟩ из D, E.

Предложение 8

Если будет сколько угодно последовательно) пропорциональных чисел от единицы, то третье от единицы**) и [все] через одно***) будут квадратами, четвёртое же и [все] через два ⟨будут⟩ кубами, седьмое же и [все] через пять одновременно квадратами и кубами* (3).

Пусть будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел от единицы A, B, C, D, E, I; я утверждаю, что третье от единицы B и все через одно будут квадратами, четвёртое же C и все через два ⟨будут⟩ кубами, седьмое же I и все через пять — одновременно квадратами и кубами (черт. 8).



Черт. 8.

Действительно, поскольку будет, что как единица к A, так и A к B, то значит, равное количество раз измеряют единица — число A и A — ⟨число⟩ B (определение 21 книги VII). Единица же измеряет число A по ⟨количеству⟩ единиц в нём; и значит, A измеряет B по ⟨количеству⟩ единиц в A. Значит, A, умножая само себя, произвело B; значит, B есть квадрат. И поскольку B, C, D последовательно пропорциональны, B же есть квадрат, то значит, и D будет квадратом (предложение 22 книги VIII). На том же вот основании и I будет квадратом. Тогда подобным же образом докажем, что и все через одно будут квадратами. Вот я утверждаю, что и четвёртое от единицы — C будет кубом, и все через два. Действительно, поскольку будет, что как единица к A, так и B к C, то значит, равное количество раз единица измеряет число A и B — ⟨число⟩ C. Единица же измеряет число A по ⟨количеству⟩ единиц в A; и значит, B измеряет C по ⟨количеству⟩ единиц в A; значит, A, умножая B, произвело C. Поскольку теперь A,

---

*) В подлиннике употреблён термин ἑξῆς.

**) Мы бы сказали «второе от единицы»; греки же, ведя счёт от какого-нибудь объекта, всегда включают в счёт и его.

***) В подлиннике οἱ ἕνα διαλείποντες — оставляющие одно между.

умножая само себя, произвело B, умножая же B, произвело C, то значит, C будет кубом. И поскольку C, D, E, I последовательно пропорциональны, C же есть куб, то значит, и I будет кубом (предложение 23 книги VIII). Доказано же, что ⟨оно⟩ и квадрат; значит, седьмое от единицы будет кубом и квадратом. Подобным же вот образом докажем, что и все через пять будут кубами и квадратами, что и требовалось доказать.

Предложение 9

Если будет сколько угодно последовательных чисел в непрерывной пропорции) от единицы, ⟨число⟩ же за единицей квадрат, то и все остальные будут квадратами. И если ⟨число⟩ за единицей куб, то и все остальные будут кубами.*

Черт. 9.

Пусть будет сколько угодно последовательных[1] пропорциональных чисел от единицы A, B, C, D, E, I, ⟨число⟩ же за единицей A пусть будет квадратом; я утверждаю, что и все остальные будут квадратами (черт. 9).

Теперь, то, что третье от единицы, ⟨именно⟩ B, и все через одно будут квадратами, доказано (предложение 8); я утверждаю [вот], что и остальные все суть квадраты. Действительно, поскольку A, B, C последовательно пропорциональны, и A есть квадрат, то [значит] и C будет квадратом (предложение 22 книги VIII). Затем, поскольку [и] B, C, D последовательно пропорциональны, и B есть квадрат, то [значит] и D будет квадратом. Подобным же вот образом докажем, что и все остальные будут квадратами.

Но вот пусть A будет кубом; я утверждаю, что и остальные все будут кубами.

Теперь, то, что четвёртое от единицы C и все через два будут кубами, доказано (предложение 8); я утверждаю

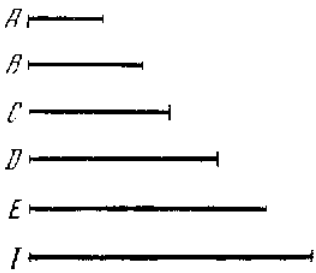
---

*) В подлиннике — оба термина: ὁποσοιοῦν ἑξῆς κατὰ τὸ συνεχὲς ἀριθμοί.

[вот], что и остальные все суть кубы. Действительно, поскольку будет, что как единица к A, так и A к B, то значит, одинаковое число раз единица измеряет A и A — ⟨число⟩ B. Единица же измеряет A по ⟨числу⟩ единиц в нём; значит, и A измеряет B по ⟨числу⟩ своих единиц; значит, A, умножая само себя, произвело B. И A есть куб. Если же кубическое число, умножая само себя, производит что-то, то возникающее будет кубом (предложение 3); значит, и B будет кубом. И поскольку четыре числа A, B, C, D последовательно пропорциональны, и A есть куб, то значит, и D будет кубом (предложение 23 книги VIII). На том же вот основании и E будет кубом, и подобным образом все остальные будут кубами, что и требовалось доказать (4).

Предложение 10

Если будет сколько угодно [последовательно] пропорциональных чисел от единицы, ⟨число⟩ же за единицей не квадрат, то и никакое другое не будет квадратом, кроме третьего от единицы и всех через одно. И если ⟨число⟩ за единицей не куб, то и никакое другое не будет кубом, кроме четвёртого от единицы и всех через два.



Черт. 10.

Пусть будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел от единицы A, B, C, D, E, I, ⟨число⟩ же за единицей A пусть не будет квадратом; я утверждаю, что и никакое другое не будет квадратом, кроме третьего от единицы [и ⟨всех⟩ через одно] (черт. 10).

Действительно, если возможно, пусть C будет квадратом. Также и B квадрат (предложение 8); значит, B, C имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу. И как B к C, так и A к B; значит, A, B имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу; так что A, B будут подобными плоскостными ⟨числами⟩ (предложение 26 книги VIII). И B — квадрат; значит, и A будет квадратом; этого же не предполагалось.

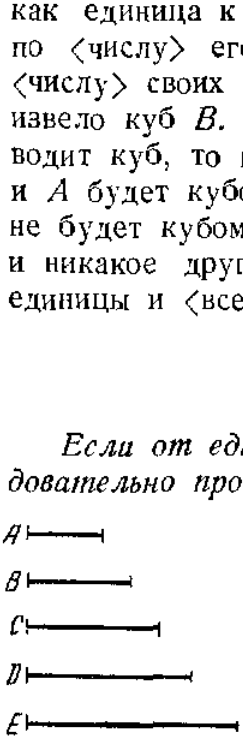
Значит, C не будет квадратом. Подобным же вот образом докажем, что и никакое другое не будет квадратом, кроме третьего от единицы и всех через одно.

Но вот пусть A не будет кубом. Я утверждаю, что и никакое другое не будет кубом, кроме четвёртого от единицы и ⟨всех⟩ через два.

В самом деле, если возможно, пусть D будет кубом. Также и C куб, ибо оно четвёртое от единицы (предложение 8). И как C к D, так и B к C; и значит, B имеет к C отношение, как куб к кубу. И C есть куб; значит, и B будет кубом (предложение 25 книги VIII). И поскольку как единица к A, так и A к B, единица же измеряет A по ⟨числу⟩ его единиц, то значит, и A измеряет B по ⟨числу⟩ своих единиц; значит, A, умножая само себя, произвело куб B. Если же число, умножая само себя, производит куб, то и само будет кубом (предложение 6). Значит, и A будет кубом; этого же не предполагается. Значит, D не будет кубом. Подобным же вот образом докажем, что и никакое другое не будет кубом, кроме четвёртого от единицы и ⟨всех⟩ через два, что и требовалось доказать.

Предложение 11

Если от единицы сколько угодно чисел будут последовательно пропорциональны, то меньшее измеряет большее по ⟨количеству единиц⟩ в каком-либо из находящихся среди пропорциональных чисел.



Черт. 11.

Пусть будет от единицы A сколько угодно последовательно пропорциональных чисел B, C, D, E; я утверждаю, что из B, C, D, E наименьшее B измеряет E по ⟨количеству единиц⟩ в каком-либо из C, D (черт. 11).

Действительно, поскольку будет, что как единица A к B, так и D к E, то значит, равное число раз единица A измеряет число B и D — ⟨число⟩ E; значит, и перестановкой, равное число раз единица A измеряет D и B ⟨измеряет⟩ E (предложение 15 книги VII). Единица же A изме-

ряет D по ⟨числу⟩ единиц в нём; значит, и B измеряет E по ⟨числу⟩ единиц в D; значит, меньшее B измеряет большее E по ⟨количеству единиц⟩ в каком-либо из находящихся среди пропорциональных чисел.

Следствие

И ясно, что какое место от единицы имеет измеряющее, то же самое ⟨место⟩ имеет и то, по ⟨числу единиц⟩ в котором оно измеряет, ⟨если считать⟩ от измеряемого ⟨назад⟩ к предшествующему, что и требовалось доказать.

Предложение 12

Если будет от единицы сколько угодно последовательно пропорциональных чисел, то какими первыми числами измеряется последнее ⟨число⟩, теми же самыми измерится и то, которое при единице.

Черт. 12.

Пусть будет от единицы сколько угодно пропорциональных чисел A, B, C, D; я утверждаю, что какими первыми числами измеряется D, теми же самыми измерится и A (черт. 12).

Действительно, пусть D измеряется каким-нибудь первым числом E; я утверждаю, что E измеряет A. Действительно, пусть не ⟨измеряет⟩; и E первое; всякое же первое число будет первым со всяким, которого оно не измеряет (предложение 29 книги VII); значит, E, A будут первыми между собой. И поскольку E измеряет D, то пусть оно измеряет его по ⟨числу единиц⟩ в I; значит, E, умножая I, произвело D. Затем, поскольку A измеряет D по

⟨числу⟩ единиц в C (предложение 11, следствие), то значит, A, умножая C, произвело D. Но также и E, умножая I, произвело D; значит, ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨произведению⟩ из E, I. Значит, будет, что как A к E, так и I к C (предложение 19 книги VII). Но A, E первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же равное число раз измеряют имеющие с ними то же самое отношение (предложение 20 книги VII), предыдущее — предыдущее и последующее - последующее; значит, E измеряет C. Пусть оно будет измерять его по ⟨числу единиц в⟩ H; значит, E, умножая H, произвело C. Но также на основании предыдущего и A, умножая B, произвело C (предложение 11, следствие). Значит, ⟨произведение⟩ из A, B равно ⟨произведению⟩ из E, H. Значит, будет, что как A к E, так и H к B (предложение 19 книги VII). Но A, E первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же числа равное число раз измеряют имеющие с ними то же самое отношение (предложение 20 книги VII), предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; значит, E измеряет B. Пусть оно измеряет его по ⟨числу единиц в⟩ G; значит, E, умножая G, произвело B. Но также и A, умножая само себя, произвело B (предложение 8); значит, ⟨произведение⟩ из E, G равно ⟨квадрату⟩ на A*). Значит, будет, что как E к A, так и A к G (предложение 19 книги VII). Но A, E первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же одинаковое число раз измеряют имеющие то же самое отношение, предыдущее — предыдущее и последующее — последующее (предложение 20 книги VII); значит, E измеряет A, как предыдущее — предыдущее. Но оно также и не измеряет; это же невозможно. Значит, E, A не будут первыми между собой. Значит, ⟨они⟩ составные. Составные же измеряются каким-нибудь [первым] числом (определение 15 книги VII). И поскольку E предполагается первым, первое же не измеряется никаким другим числом, кроме как самим собой (определение 12 книги VII), то значит, E измеряет A, E;

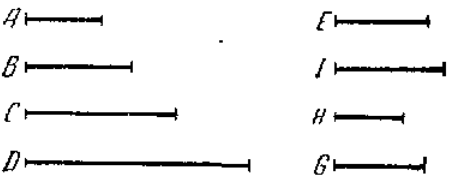
---

*) τῷ ἀπὸ τοῦ A — терминология, обычная в геометрических книгах, но встречающаяся первый раз в арифметической.

так что E измеряет A. Измеряет оно также и D; значит, E измеряет A, D *). Подобным же вот образом докажем, что какими первыми числами измеряется D, теми же самыми будет измеряться и A, что и требовалось доказать.

Предложение 13

Если будет от единицы сколько угодно последовательно пропорциональных чисел, то же ⟨число, что⟩ за единицей, будет первое, то наибольшее ⟨число⟩ не будет измеряться никаким [другим], кроме находящихся среди пропорциональных чисел.



Черт. 13.

Пусть будет от единицы сколько угодно последовательно пропорциональных чисел A, B, C, D, то же ⟨число, что⟩ за единицей — A пусть будет первым; я утверждаю, что наибольшее из них D не будет измеряться никаким другим, кроме A, B, C (черт. 13).

Действительно, если возможно, пусть оно будет измеряться E, и пусть E не будет тождественным никакому из A, B, C. Тогда ясно, что E первым не будет. Действительно, если E первое и измеряет D, то оно измерит и A, являющееся первым, не будучи с ним тождественно; это же невозможно (предложение 12). Значит, E не будет первым. Значит, оно составное. Всякое же составное число измеряется каким-нибудь первым числом (предложение 32 книги VII); значит, E измеряется каким-нибудь первым числом. Вот я утверждаю, что оно не измерится никаким иным первым ⟨числом⟩, кроме A. Действительно, если E будет измеряться другим ⟨числом⟩, E же измеряет D, то значит, то ⟨число⟩ измерит и D; так что оно измерит и A, являющееся первым, не будучи с ним тождественно

*) Эту фразу, как не входящую в формулировку теоремы, Гейберг считает лишней и, может быть, неподлинной, не вставляя её, однако, в квадратные скобки.

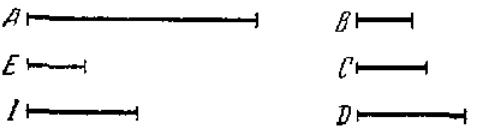
(предложение 12); это же невозможно. Значит, A измеряет E. И поскольку E измеряет D, пусть оно измеряет его по ⟨числу единиц в⟩ I. Я утверждаю, что I не будет тождественно ни одному из A, B, C. Действительно, если I тождественно одному из A, B, C и измеряет D по ⟨числу единиц в⟩ E, то значит, и одно из A, B, C измеряет D по ⟨числу единиц в⟩ E. Но одно из A, B, C измеряет D по ⟨числу единиц в⟩ каком-нибудь из A, B, C (предложение 11); и значит, E будет тождественно с одним из A, B, C; этого же не предполагается. Значит, I не будет тождественно с одним из A, B, C. Подобным же вот образом докажем, что I измеряется A, показавши опять, что I не будет первым. Действительно, если ⟨так⟩ и оно измеряет D, то измерит и A, являющееся первым (предложение 12), не будучи ему тождественно; это же невозможно; значит, I не будет первым; значит, оно составное. Всякое же составное число измеряется каким-нибудь первым числом (предложение 32 книги VII); значит, I измеряется каким-нибудь первым числом. Вот я утверждаю, что оно не будет измеряться никаким другим первым ⟨числом⟩, кроме A. Действительно, если какое-нибудь другое первое ⟨число⟩ измеряет I, а I измеряет D, то значит, то ⟨число⟩ измерит D; так что оно измерит и A, являющееся первым, не будучи с ним тождественно (предложение 12); это же невозможно. Значит, A измеряет I. И поскольку E измеряет D по ⟨числу единиц в⟩ I, то значит, E, умножая I, произвело D. Но также и A, умножая C, произвело D (предложение 11); значит, ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨произведению⟩ из E, I. Значит, будет пропорция — как A к E, так и I к C (предложение 19 книги VII). Но A измеряет E; значит, и I измеряет C. Пусть оно его измеряет по ⟨числу единиц в⟩ H. Тогда подобным же образом докажем, что H не будет тождественно ни с одним из A, B и что оно измеряется A. И поскольку I измеряет C по ⟨числу единиц в⟩ H, то значит, I, умножая H, произвело C. Но также и A, умножая B, произвело C (предложение 11); значит, ⟨произведение⟩ из A, B равно ⟨произведению⟩ из I, H. Значит, ⟨будет⟩ пропорция — как A к I, ⟨так и⟩ H к B (предложение 19 книги VII). Но A измеряет I; значит, и H изме-

ряет B. Пусть оно измеряет его по ‹числу единиц в› G. Тогда подобным же образом докажем, что G не будет тождественным с A. И поскольку H измеряет B по ‹числу единиц в› G, то значит, H, умножая G, произвело B. Но также и A, умножая само себя, произвело B (предложение 8); значит, ‹произведение› G, H*) равно квадрату на A. Значит, будет как G к A, ‹так и› A к H (предложение 19 книги VII). Но A измеряет H; значит, и G измеряет A, являющееся первым, не будучи с ним тождественно, что нелепо. Значит, наибольшее D не будет измеряться никаким другим числом, кроме A, B, C, что и требовалось доказать (5, 6, 7, 8).

Предложение 14

Если число будет наименьшим измеряемым ‹данными› первыми числами, то оно не измерится никаким иным первым числом, кроме первоначально измерявших ‹его› (9).

Пусть число A будет наименьшим измеряемым первыми числами B, C, D; я утверждаю, что A не измерится никаким иным первым числом, кроме B, C, D (черт. 14).



Черт. 14.

Действительно, если возможно, пусть оно измеряется первым ‹числом› E, и пусть E не будет тождественно ни с одним из B, C, D. И поскольку E измеряет A, пусть оно измеряет его по ‹числу единиц в› I; значит, E, умножая I, произвело A. И A измеряется первыми числами B, C, D. Если же два числа, умножая друг друга, производят что-то, возникающее же из них измеряется некоторым первым числом, то ‹последнее› измерит и одно из первоначальных (предложение 30 книги VII); значит, B, C, D измерят одно из E, I. Теперь E они не измерят, ибо E есть первое и ни одному из B, C, D не тождественное.

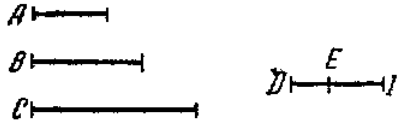
*) Опять геометрический термин: ὁ ὑπὸ Θ, Η; в арифметических книгах до сих пор для обозначения произведения употреблялся термин ὁ ἐκ τῶν Θ, Η — что из G, H (подразумевается: «получается»).

Значит, они измерят I, являющееся меньшим A; это же невозможно, ибо A предполагается наименьшим измеряемым B, C, D. Значит, A не будет измеряться ⟨другим⟩ первым числом, кроме B, C, D, что и требовалось доказать.

Предложение 15

Если три последовательно пропорциональных числа будут наименьшими из имеющих то же отношение с ними, то два какие-нибудь сложенные будут первыми с оставшимся.

Пусть три последовательно пропорциональных числа, наименьшие из имеющих то же отношение с ними, будут A, B, C; я утверждаю, что из A, B, C *два какие-нибудь сложенные* будут первыми с оставшимся, т. е. A ⟨и⟩ B с C, а B ⟨и⟩ C с A и, наконец, A ⟨и⟩ C с B (черт. 15).



Черт. 15.

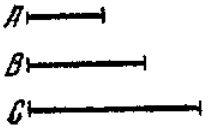
Действительно, возьмём наименьшие из имеющих то же отношение с A, B, C два числа DE, EI (предложение 2 книги VIII). Ясно тогда, что DE, умножая само себя, произвело A, умножая же EI, произвело B, и ещё EI, умножая само себя, произвело C. И поскольку DE, EI — наименьшие, они будут первыми между собой (предложение 22 книги VII). Если же два числа будут первыми между собой, то и вместе взятые они будут первыми с каждым ⟨из первоначальных⟩ (предложение 28 книги VII); значит, и DI будет первым с каждым из DE, EI. Но и DE является первым с EI; значит, DI, DE будут первыми с EI. Если же два числа будут первыми с некоторым числом, то и возникающее из них будет первым с оставшимся (предложение 24 книги VII); так что ⟨произведение⟩ из ID, DE будет первым с EI; так что и ⟨произведение⟩ из ID, DE будет первым с ⟨квадратом⟩ на EI. [Действительно, если два числа будут первыми между собой, то и возникающее из одного из них будет первым с оставшимся] (предложение 25 книги VII). Но ⟨произведение⟩ из ID, DE представляет ⟨квадрат⟩ на DE вместе с ⟨произведением⟩ из DE, EI (пред-

ложение 3 книги II); значит, ⟨квадрат⟩ на *DE* вместе с ⟨произведением⟩ из *DE*, *EI* будет первым с ⟨квадратом⟩ на *EI*. И ⟨квадрат⟩ на *DE* будет *A*, ⟨произведение⟩ же из *DE*, *EI* есть *B*, ⟨квадрат⟩ же на *EI* есть *C*; значит, *A*, *B* сложенные будут первыми с *C*. Подобным же вот образом докажем, что и *B*, *C* ⟨сложенные⟩ будут первыми с *A*. Вот я утверждаю, что и *A*, *C* ⟨сложенные⟩ будут первыми с *B*. Действительно, поскольку *DI* будет первым с каждым из *DE*, *EI*, то и ⟨квадрат⟩ на *DI* будет первым с ⟨произведением⟩ из *DE*, *EI* (предложение 25 книги VII). Но ⟨квадрату⟩ на *DI* равны ⟨квадраты⟩ на *DE*, *EI* вместе с дважды ⟨взятым произведением⟩ из *DE*, *EI* (предложение 4 книги II); и значит, квадраты на *DE*, *EI* вместе с дважды ⟨взятым произведением⟩ *DE*, *EI* *) [будут] первыми с ⟨произведением⟩ *DE*, *EI*. По отнятии **) ⟨квадраты⟩ на *DE*, *EI* вместе с один раз ⟨взятым произведением⟩ *DE*, *EI* будут первыми с ⟨произведением⟩ *DE*, *EI*. Ещё по отнятии ⟨квадраты⟩ на *DE*, *EI* будут, значит, первыми с ⟨произведением⟩ *DE*, *EI*. И ⟨квадрат⟩ на *DE* есть *A*, ⟨произведение⟩ же *DE*, *EI* ⟨есть⟩ *B*, ⟨квадрат⟩ же на *EI* ⟨есть⟩ *C*. Значит, *A*, *C* сложенные будут первыми с *B*, что и требовалось доказать.

Предложение 16

Если два числа будут первыми между собой, то не будет, что как первое ко второму, так и второе к какому-нибудь иному.

Пусть два числа *A*, *B* будут первыми между собой; я утверждаю, что не будет как *A* к *B*, так и *B* к какому-нибудь иному (черт. 16).



Черт. 16.

Действительно, если возможно, то пусть будет, что как *A* к *B*, так и *B* к *C*. Но *A*, *B* первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же числа равное число

*) ὑπὸ τῶν *DE*, *EI* вместо обычного ἐκ.

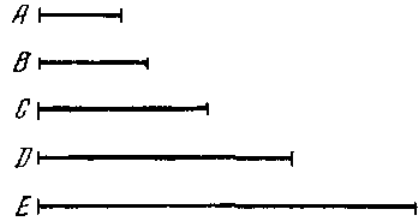
**) В тексте διελόντι, хотя ни о какой производной пропорции нет и речи; просто отбрасывается делящееся на самого себя произведение *DE*·*EI*.

раз измеряют имеющие то же самое отношение (предложение 20 книги VII), предыдущее — предыдущее и последующее — последующее. Значит, A измеряет B, как предыдущее — предыдущее. Измеряет оно также и само себя; значит, A измеряет A, B, являющиеся первыми между собой, это же нелепо. Значит, не будет, что как A к B, так и B к C, что и требовалось доказать.

Предложение 17

Если будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел, крайние же из них будут первыми между собой, то не будет, что как первое ко второму, так и последнее к какому-нибудь иному.

Пусть будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел A, B, C, D, крайние же из них A, D



Черт. 17.

пусть будут первыми между собой; я утверждаю, что не будет как A к B, так и D к какому-нибудь иному (черт. 17).

Действительно, если возможно, пусть будет, что как A к B, так и D к E; перестановкой, значит, получится (предложение 13 книги VII), что как A к D, так и B к E. Но A, D первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же числа измеряют имеющие то же отношение равное число раз (предложение 20 книги VII) предыдущее — предыдущее и последующее — последующее. Значит, A измеряет B. И будет, что как A к B, так и B к C. Значит, и B измеряет C (определение 21 книги VII); так что и A измеряет C. И поскольку будет, что как B к C, ⟨так и⟩ C к D, B же измеряет C, значит, и C из-

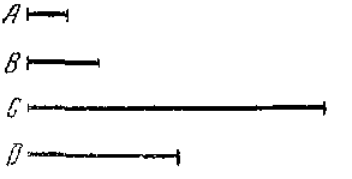
меряет D (определение 21 книги VII). Но A измеряло C; значит, A измеряет и D. Измеряет оно также и само себя. Значит, A измеряет A, D, являющиеся первыми между собой; это же невозможно. Значит, не будет, что как A к B, так и D к *какому-нибудь иному*, что и требовалось доказать.

Предложение 18

Для двух данных чисел исследовать, можно ли подыскать к ним третье пропорциональное.

Пусть будут данные два числа A, B, и пусть должно будет исследовать, можно ли подыскать к ним третье пропорциональное (черт. 18).

Вот A, B будут или первыми между собой, или нет. И если они первые между собой, то доказано, что невозможно подыскать к ним третье пропорциональное (предложение 16).



Черт. 18.

Но вот пусть не будут A, B первыми между собой и пусть B, умножая само себя, произведёт C. Тогда A или измеряет C, или не измеряет. Пусть сначала оно его измеряет по ⟨числу единиц в⟩ D; значит, A, умножая D, произвело C. Но также и B, умножая само себя, произвело C; значит, ⟨произведение⟩ из A, D равно ⟨квадрату⟩ на B. Значит, будет, что как A к B, так и B к D (предложение 19 книги VII); значит, к A, B подыскано третье пропорциональное число D.

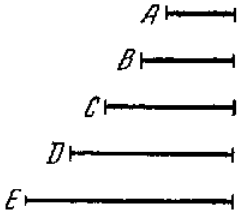
Но вот пусть A не измеряет C; я утверждаю, что к A, B невозможно подыскать третье пропорциональное число. В самом деле, если возможно, то пусть будет подыскано D. Значит, ⟨произведение⟩ из A, D равно ⟨квадрату⟩ на B (предложение 19 книги VII). ⟨Квадрат⟩ же на B есть C; значит, ⟨произведение⟩ из A, D равно C. Так что A, умножая D, произвело C; значит, A измеряет C по ⟨числу единиц в⟩ D. Но оно также предполагается и не измеряющим; это же нелепо. Значит, невозможно к A, B подыскать третье пропорциональное число, если A не измеряет C, что и требовалось доказать.

Предложение 19

Для трёх данных чисел исследовать, когда возможно подыскать к ним четвёртое пропорциональное.

Пусть будут данные три числа A, B, C, и пусть должно будет исследовать, когда возможно подыскать к ним четвёртое пропорциональное (черт. 19).

Теперь они или не будут последовательно пропорциональными и их крайние будут первыми между собой, или будут последовательно пропорциональными и их крайние не будут первыми между собой, или ни они не будут последовательно пропорциональными, ни их крайние не будут первыми между собой, или и они будут последовательно пропорциональными и их крайние будут первыми между собой.



Черт. 19.

Если теперь A, B, C будут последовательно пропорциональными и их крайние A, C будут первыми между собой, то доказано, что невозможно к ним подыскать четвёртое пропорциональное число (предложение 17). Тогда пусть не будут A, B, C последовательно пропорциональными при крайних, опять являющихся первыми между собой. Я утверждаю, что и так невозможно подыскать к ним четвёртое пропорциональное. В самом деле, если возможно, пусть будет подыскано D, так чтобы было как A к B, так и C к D, и пусть будет сделано, что как B к C, ⟨так и⟩ D к E. И поскольку будет, что как A к B, ⟨так и⟩ C к D, как же B к C, ⟨так и⟩ D к E, то значит, «по равенству» (предложение 14 книги VII), как A к C, ⟨так и⟩ C к E. Но A, C первые, первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же измеряют имеющие то же самое отношение, предыдущее — предыдущее и последующее — последующее (предложение 20 книги VII). Значит, A измеряет C, как предыдущее ⟨измеряет⟩ предыдущее. Измеряет оно также и само себя, значит, A измеряет A, C, являющиеся первыми между собой; это же невозможно. Значит, к A, B, C невозможно подыскать четвёртое пропорциональное.

Но вот пусть опять будут A, B, C последовательно пропорциональными, A, C же пусть не будут первыми между собой. Я утверждаю, что возможно подыскать к ним четвёртое пропорциональное. Действительно, пусть B, умножая C, произведёт D; значит, A или измеряет D, или не измеряет. Пусть сперва оно его измеряет по ⟨числу единиц в⟩ E; значит, A, умножая E, произвело D. Но вместе с тем и B, умножая C, произвело D; значит, ⟨произведение⟩ из A, E равно ⟨произведению⟩ из B, C. Значит, [будет] пропорция — как A к B, ⟨так и⟩ C к E (предложение 19 книги VII); значит, к A, B, C подыскано четвёртое пропорциональное E.

Но вот пусть A не будет измерять D; я утверждаю, что невозможно к A, B, C подыскать четвёртое пропорциональное. В самом деле, если возможно, пусть будет подыскано E; значит, ⟨произведение⟩ из A, E равно ⟨произведению⟩ из B, C (предложение 19 книги VII). Но ⟨произведение⟩ из B, C есть D; и значит, ⟨произведение⟩ из A, E равно будет D. Значит, A, умножая E, произвело D; значит, A измеряет D по ⟨числу единиц в⟩ E, так что A измеряет D. Но оно и не измеряет, что нелепо. Значит, невозможно подыскать к A, B, C четвёртое пропорциональное, когда A не измеряет D.

Но вот пусть не будут ни A, B, C последовательно пропорциональными, ни крайние первыми между собой. И пусть B, умножая C, произведёт D. Подобным же вот образом докажется, что если A измеряет D, то возможно подыскать к ним ⟨четвёртое⟩ пропорциональное, если же не измеряет, то невозможно, что и требовалось доказать.

Предложение 20

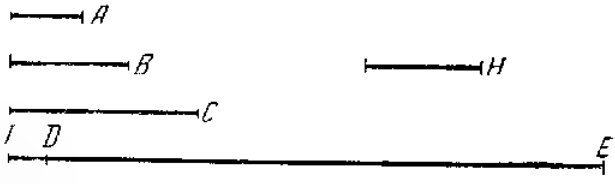
Первых чисел существует больше всякого предложенного количества первых чисел.

Пусть предложенные первые числа будут A, B, C; я утверждаю, что первых чисел существует больше, чем A, B, C (черт. 20).

Действительно, возьмём наименьшее ⟨число⟩, измеряемое A, B, C (предложение 36 книги VII), и пусть оно

будет DE, и приложим к DE единицу DI. Вот EI или будет первым, или нет. Пусть сперва оно будет первым; значит, найдено первых чисел A, B, C, EI больше, чем A, B, C.

Но вот пусть EI не будет первым; значит, оно измеряется некоторым первым числом (предложение 31 книги VII). Пусть оно будет измеряться первым ⟨числом⟩ H; я утверждаю, что H не будет тождественным ни с одним из A,



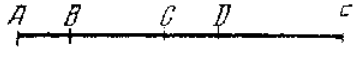
Черт. 20.

B, C. В самом деле, если возможно, пусть будет. Но A, B, C измеряют DE; значит, и H измерит DE. Оно же измеряет и EI; и остающуюся единицу DI измерит H, будучи числом; это же нелепо. Значит, H не будет тождественным ни с одним из A, B, C. И оно предполагается первым; значит, найдено первых чисел больше предложенного количества A, B, C, ⟨а именно⟩, A, B, C, H, что и требовалось доказать (10, 11, 12, 13, 14).

Предложение 21

Если складывается сколько угодно чётных чисел, то целое будет чётным (15).

Пусть складывается сколько угодно чётных чисел AB, BC, CD, DE; я утверждаю, что целое AE будет чётным (черт. 21).



Черт. 21.

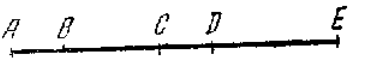
Действительно, поскольку каждое из AB, BC, CD, DE является чётным, то оно имеет половинную часть (опреде-

ление 6 книги VII); так что и целое имеет половинную часть. Чётным же числом является делящееся пополам (определение 6 книги VII); значит, AE будет чётным, что и требовалось доказать.

Предложение 22

Если складывается сколько угодно нечётных чисел, количество же их будет чётным, то целое будет чётным.

Пусть складывается сколько угодно нечётных чисел в чётном количестве AB, BC, CD, DE; я утверждаю, что целое AE будет чётным (черт. 22).

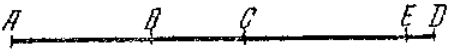


Черт. 22.

Действительно, поскольку каждое из AB, BC, CD, DE является нечётным, то после отнятия от каждого единицы каждый из остатков будет чётным (определение 7 книги VII) так что и составленное из них будет чётным (предложение 21). Также и количество единиц будет чётным. Значит, и целое AE будет чётным, что и требовалось доказать (16).

Предложение 23

Если складывается сколько угодно нечётных чисел, количество же их будет нечётным, то и целое будет нечётным.



Черт. 23.

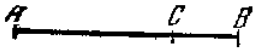
Пусть складывается сколько угодно нечётных чисел, количество которых будет нечётным, ⟨а именно⟩, AB, BC, CD; я утверждаю, что и целое AD будет нечётным (черт. 23).

Отнимем от CD единицу DE; значит, остаток CE будет чётным (определение 7 книги VII). Также и CA чётное (предложение 22); значит, и целое AE будет чётным. И есть единица DE. Значит, AD будет нечётным (определение 7 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 24

Если от чётного числа отнимается чётное, то остаток будет чётным.

Пусть от чётного AB отнимается чётное BC; я утверждаю, что остаток CA будет чётным (черт. 24).



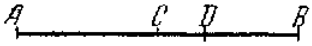
Черт. 24.

Действительно, поскольку AB есть чётное, то оно имеет половинную часть. На том же вот основании и BC имеет половинную часть (определение 6 книги VII); значит, и остаток [CA имеет половинную часть; значит] чётным будет AC, что и требовалось доказать.

Предложение 25

Если от чётного числа отнимается нечётное, то остаток будет нечётным.

Пусть от чётного AB отнимается нечётное BC; я утверждаю, что остаток CA будет нечётным (черт. 25).



Черт. 25.

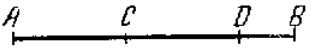
Действительно, отнимем от BC единицу CD; значит, DB будет чётным (определение 7 книги VII). Также и AB чётное; значит, и остаток AD будет чётным (предложение 24). И есть единица CD; значит, CA будет нечётным (определение 7 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 26

Если от нечётного числа отнимается нечётное, то остаток будет чётным.

Пусть от нечётного AB отнимается нечётное BC; я утверждаю, что остаток CA будет чётным (черт. 26).

Действительно, поскольку AB является нечётным, то отнимем единицу BD; значит, остаток AD будет чётным.



Черт. 26.

Тогда на том же основании и CD будет чётным (определение 7 книги VII); так что и остаток CA будет чётным (предложение 24), что и требовалось доказать.

Предложение 27

Если от нечётного числа отнимается чётное, то остаток будет нечётным.

Пусть от нечётного AB отнимается чётное BC; я утверждаю, что остаток CA будет нечётным (черт. 27).

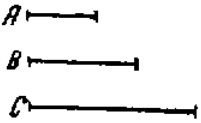
Черт. 27.

[Действительно], отнимем единицу AD; значит, DB будет чётным (определение 7 книги VII). Также и BC чётное; значит, и остаток CD будет чётным (предложение 24). Значит, CA будет нечётным (определение 7 книги VII), что и требовалось доказать.

Предложение 28

Если нечётное число, умножая чётное, производит что-то, то возникающее будет чётным.

Пусть нечётное число A, умножая чётное B, произведёт C; я утверждаю, что C будет чётным (черт. 28).

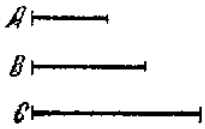


Черт. 28.

Действительно, поскольку A, умножая B, произвело C, то значит, C складывается из стольких ⟨чисел⟩, равных B, сколько будет в A единиц (определение 16 книги VII). И B чётное; значит, C складывается из чётных. Если же складывается сколько угодно чётных чисел, то целое будет чётным (предложение 21). Значит, C будет чётным, что и требовалось доказать.

Предложение 29

Если нечётное число, умножая нечётное число, производит что-то, то возникающее будет нечётным.



Черт. 29.

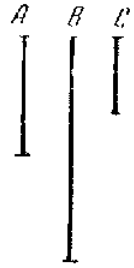
Пусть нечётное число A, умножая нечётное B, произведёт C; я утверждаю, что C будет нечётным (черт. 29).

Действительно, поскольку A, умножая B, произвело C, то значит, C складывается из стольких ⟨чисел⟩, равных B, сколько будет в A единиц (определение 16 книги VII). И каждое из A, B нечётно; значит, C складывается из нечётных чисел, количество которых нечётно. Так что C будет нечётным (предложение 23), что и требовалось доказать.

Предложение 30

Если нечётное число измеряет чётное число, то оно будет измерять и его половину.

Пусть нечётное число A измеряет чётное B; я утверждаю, что оно будет измерять и его половину (черт. 30).



Черт. 30.

Действительно, поскольку A измеряет B, то пусть оно измеряет его по ⟨числу единиц в⟩ C; я утверждаю, что C не будет нечётным. В самом деле, если возможно, пусть будет. И поскольку A измеряет B по ⟨числу единиц в⟩ C, то значит, A, умножая C, произвело B. Значит, B складывается из нечётных чисел, количество которых нечётно. Значит, B будет нечётным (предложение 23); это же нелепо, ибо оно предполагается чётным. Значит, C не будет нечётным; значит, чётным будет C. Так что A измеряет B чётное число раз. Тогда на основании этого*) оно измерит и его половину, что и требовалось доказать.

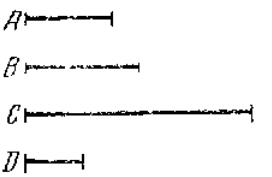
---

*) Так как половина будет измеряться в соответствии с числом, равным половине того, которым измеряется целое (Гейберг).

Предложение 31

Если нечётное число по отношению к некоторому числу будет первым, то оно будет первым и по отношению к его удвоенному.

Пусть нечётное число A по отношению к некоторому числу B будет первым, пусть же удвоенное B будет C; я утверждаю, что A [и] по отношению к C будет первым (черт. 31).



Черт. 31

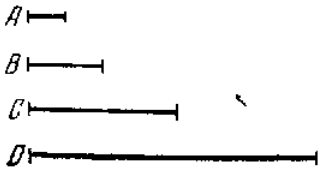
Действительно, если не будут [A, C] первые, то их измерит некоторое число. Пусть оно измеряет и будет D. И A нечётное; значит, и D — нечётное. И поскольку D, будучи нечётным, измеряет C, и C является чётным, то значит, [D] измерит и половину C. Половина же C есть B; значит, D измеряет B. Измеряет оно также и A. Значит, D измеряет A, B, являющиеся первыми между собой; это же невозможно. Значит, не будет A по отношению к C не первым. Значит, A, C будут первыми между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 32

Из чисел, получаемых удвоением от двойки, каждое будет только чётно-чётным.

Пусть от двойки A будет получено удвоением сколько угодно чисел B, C, D; я утверждаю, что B, C, D будут только чётно-чётными (черт. 32).

Теперь, что каждое [из B, C, D] будет чётно-чётным, очевидно, ибо оно получено удвоением от двойки (определение 8 книги VII). Я утверждаю, что и только. Действительно, отложим единицу.



Черт. 32.

Поскольку теперь от единицы будет сколь угодно последовательно пропорциональных чисел, и то, ⟨что⟩ за единицей, ⟨т. е.⟩ A, первое, то наибольшее из A, B, C, D, ⟨именно⟩ D, не измерится никаким другим, кроме A, B, C (предложение 13). И каждое

из A, B, C есть чётное; значит, D будет только чётно-чётным (определение 8 книги VII). Подобным же вот образом докажем, что [и] каждое из B, C будет только чётно-чётным, что и требовалось доказать.

Предложение 33

Если число имеет нечётную половину, то оно будет только чётно-нечётным.

Пусть число A имеет нечётную половину; я утверждаю, что A будет только чётно-нечётным (черт. 33).

Теперь, что оно будет чётно-нечётным, очевидно; ибо его половина, будучи нечётным, измеряет его чётное число раз (определение 9 книги VII). Вот я утверждаю, что и только. Действительно, если A будет и чётно-чётным, то оно измерится чётным по ⟨числу единиц в⟩ чётном числе (определение 8 книги VII), так что и половина его измерится чётным числом, будучи нечётной; это же нелепо. Значит, A будет только чётно-нечётным, что и требовалось доказать.

Черт. 33.

Предложение 34

Если число не будет из получаемых удвоением от двойки и не имеет нечётную половину, то оно будет и чётно-чётным и чётно-нечётным.

Пусть число A не будет из получаемых удвоением от двойки и пусть оно не имеет нечётную половину; я утверждаю, что A будет и чётно-чётным и чётно-нечётным (черт. 34).

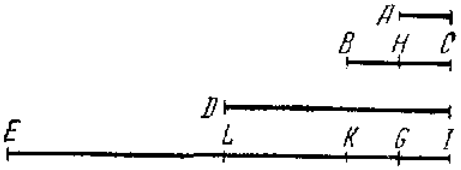
Теперь, что A будет чётно-чётным, очевидно, ибо оно не имеет нечётной половины (определение 8 книги VII). Вот я утверждаю, что оно будет и чётно-нечётным. Действительно, если A разделим пополам и половину его пополам, и будем делать это всё время, то дойдём до некоторого нечётного числа, которое будет измерять A по ⟨числу единиц в⟩ чётном числе. Действи-

Черт. 34.

тельно, если нет, то дойдём до двойки, и будет A из получаемых удвоением от двойки; этого же не предполагается. Доказано же, что оно и чётно-чётное. Значит, A будет и чётно-чётным и чётно-нечётным, что и требовалось доказать.

Предложение 35

Если будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел и от второго и последнего будут отняты ⟨числа⟩, равные первому, то будет, что как остаток второго к первому, так и остаток последнего ко всем ему предшествующим ⟨вместе⟩.



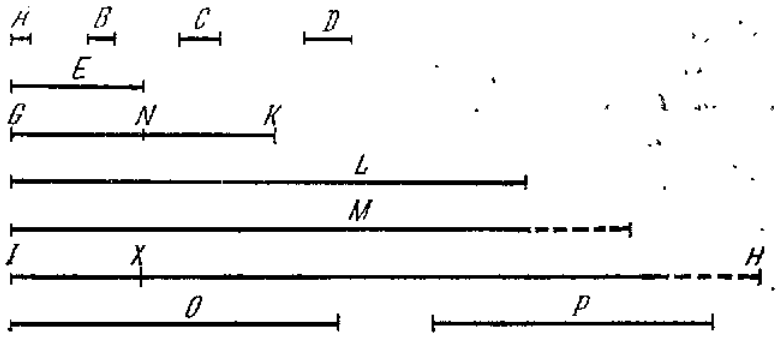
Черт. 35.

Пусть будет сколько угодно последовательно пропорциональных чисел A, BC, D, EI, начиная от наименьшего A, и пусть от BC и EI будут отняты равные A каждое из BH, IG; я утверждаю, что будет как HC к A, так и EG к A, BC, D ⟨вместе⟩ (черт. 35).

Действительно, отложим IK, равное BC, и IL, равное D. И поскольку IK равно BC, и в них IG равно BH, то значит, остаток GK равен остатку HC. И поскольку будет, что как EI к D, так и D к BC, и BC к A (предложение 13 книги VII), D же равно IL, BC же — IK, A же IG, то значит, будет, что как EI к IL, так и LI к IK и IK к IG. «Выделяя» (предложения 11 и 13 книги VII), как EL к LI, так и LK к IK и KG к IG. Значит, и как один из предыдущих к одному из последующих, так и все ⟨вместе⟩ предыдущие ко всем ⟨вместе⟩ последующим (предложение 12 книги VII); значит, будет, что как KG к IG, так и EL, LK, KG к LI, IK, GI. Но KG равно CH, IG же A, а LI, IK, GI ⟨равны⟩ D, BC, A; значит, будет, что как CH к A, так и EG к D, BC, A. Значит, будет, что как остаток второго к первому, так и остаток последнего ко всем ему предшествующим, что и требовалось доказать.

Предложение 36

Если от единицы откладывается сколько угодно последовательно ⟨пропорциональных⟩ чисел в двойном отношении, до тех пор, пока вся ⟨их⟩ совокупность сложенная не сделается первым ⟨числом⟩ и вся совокупность, умноженная на последнее ⟨число⟩, произведёт что-то, то возникающее ⟨число⟩ будет совершенным.



Черт. 36

Пусть от единицы будут отложены сколько угодно чисел в двойном отношении до тех пор, пока вся их совокупность сложенная не сделалась первым ⟨числом, а именно⟩, A, B, C, D, и пусть E равно будет ⟨этой⟩ совокупности, и E, умноженное на D, произведёт IH. Я утверждаю, что IH будет совершенным ⟨числом⟩ (черт. 36).

Действительно, каково будет количество A, B, C, D, столько же возьмём от E в двойном отношении ⟨чисел⟩ E, GK, L, M. Значит, «по равенству» (предложение 14 книги VII) будет, что как A к D, так и E к M. Значит, ⟨произведение⟩ из E, D равно будет ⟨произведению⟩ из A, M (предложение 19 книги VII). И ⟨произведение⟩ из E, D есть IH; и значит, ⟨произведение⟩ из A, M будет IH. Значит, A, умножая M, произвело IH; значит, M измеряет IH по ⟨числу⟩ единиц в A. И A есть двойка; значит, IH будет вдвое больше M. Также и M, L, GK, E будут последовательно вдвое больше друг друга; значит, E, GK, L, M, IH последовательно пропорциональны в двойном отношении. Тогда отнимем от второго GK и от последнего IH ⟨соответст-

венно⟩ каждое из GN, IX, равных первому E; значит, будет, что как остаток второго числа к первому, так и остаток последнего ко всем ему предшествующим (предложение 35). Значит, будет, что как NK к E, так и XH к M, L, KG, E ⟨вместе⟩. И NK равно E; значит, и XH равно M, L, GK, E ⟨вместе⟩. Также и IX равно E, E же ⟨равно⟩ A, B, C, D и единице. Значит, всё IH равно E, GK, L, M и A, B, C, D и единице; и оно измеряется ими. Я утверждаю, что и IH не измерится никаким иным ⟨числом⟩, кроме A, B, C, D, E, GK, L, M и единицы. В самом деле, если возможно, пусть какое-то O измеряет IH и пусть O не будет тождественно ни с одним из A, B, C, D, E, GK, L, M. И сколько раз O измеряет IH, пусть столько единиц будет в P; значит, P, умножая O, произвело IH. Но вместе с тем и E, умножая D, произвело IH; значит, будет (предложение 19 книги VII), что как E к P, ⟨так и⟩ O к D. И поскольку от единицы будут последовательно пропорциональные ⟨числа⟩ A, B, C, D, то значит, D не измерится никаким иным числом, кроме A, B, C (предложение 13). И предполагается, что G не тождественно ни с одним из A, B, C; значит, O не измерит D. Но как G к D, ⟨так и⟩ E к P; значит, и E не измеряет P (определение 21 книги VII). И E — первое; всякое же первое число [будет] первым по отношению ко всякому, кого оно не измеряет (предложение 29 книги VII). Значит, E, P будут первыми между собой. Первые же и наименьшие (предложение 21 книги VII), наименьшие же равное число раз измеряют имеющие с ними то же отношение (предложение 20 книги VII), предыдущее — предыдущее и последующее — последующее; и как E к P, ⟨так и⟩ O к D; значит, равное число раз E измеряет O и P ⟨измеряет⟩ D. Но D не измеряется никаким иным, кроме A, B, C, значит, P будет тождественно одному из A, B, C. Пусть оно тождественно B. И каково будет количество B, C, D, ⟨начиная⟩ от E, возьмём столько же ⟨чисел⟩ — E, GK, L. И E, GK, L с B, C, D будут в том же самом отношении; значит, «по равенству» будет (предложение 14 книги VII), что как B к D, ⟨так и⟩ E к L. Значит, ⟨произведение⟩ из B, L равно ⟨произведению⟩ из D, E (предложение 19 книги VII); но ⟨произведение⟩ из D, E равно ⟨произведению⟩

из P, O; и значит, ⟨произведение⟩ из P, O равно ⟨произведению⟩ из B, L. Значит, будет, что как P к B, ⟨так и⟩ L к O (предложение 19 книги VII). И P тождественно с B; значит, и L будет тождественно с O; это же невозможно; ибо O предполагается не тождественным ни одному из отложенных ⟨чисел⟩. Значит, IH не измерится никаким числом, кроме A, B, C, D, E, GK, L, M и единицы. И доказано, что IH равно A, B, C, D, E, GK, L, M и единице. Совершенным же числом будет то, которое равно своим частям (определение 23 книги VII); значит, IH будет совершенным, что и требовалось доказать (17, 18, 19).

КНИГА ДЕСЯТАЯ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ (1)

1. *Соизмеримыми* (2) *величинами* называются измеряемые одной и той же мерой, *несоизмеримыми* же — для которых никакая общая мера не может быть образована.

2. Прямые являются *соизмеримыми в степени*, если квадраты на них измеряются одной и той же площадью, *несоизмеримыми* же, если для квадратов на них не может быть образована никакая площадь как общая мера.

3. При этих предположениях доказывается, что для заданной прямой существует бесконечное количество прямых как соизмеримых, так и несоизмеримых, ⟨причём⟩ некоторые ⟨соизмеримы или несоизмеримы⟩ только линейно, другие же и в степени. Назовём теперь заданную прямую *рациональной*, а соизмеримые с ней, как и линейно и в степени, так и только в степени, будем называть *рациональными*, несоизмеримые же с ней — *иррациональными* (3).

4. И назовём квадрат на заданной прямой *рациональным*, и ⟨все площади⟩, с ним соизмеримые, *рациональными*, несоизмеримые же с ним — *иррациональными*, и ⟨линии⟩, их квадрирующие *), — *иррациональными*, ⟨причём⟩ если ⟨эти площади⟩ являются квадратами, то самые стороны, если же какими-нибудь иными прямолинейными фигурами, то — ⟨линии, на которых⟩ строятся равные им квадраты (4).

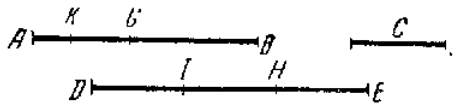
---

*) αἱ δύνάμεναι αὐτά — мы **сказали бы просто — квадратные корни** из этих площадей.

Предложение 1

Для двух заданных неравных величин, если от большей отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше заданной меньшей величины.

Пусть будут две неравные величины AB, C, из которых большая AB; я утверждаю, что если от AB отнимается больше половины и от остатка больше половины, и это делается постоянно, то останется некоторая величина, которая будет меньше величины C (черт. 1).



Черт. 1.

Действительно, C, взятая ⟨достаточное число раз⟩ кратной, станет когда-нибудь больше AB (определение 4 книги V). Будем брать её кратной, и пусть DE будет кратной C и большей AB, и разделим DE на равные C ⟨части⟩ DI, IH, HE, и отнимем от AB бо́льшую половины ⟨часть⟩ BG, от AG же — бо́льшую половины ⟨часть⟩ GK, и будем делать это постоянно, пока деления в AB не сделаются равными по количеству делениям в DE.

Пусть теперь деления AK, KG, GB будут равными по количеству ⟨делениям⟩ DI, IH, HE; и поскольку DE больше AB, и от DE отнимается меньшая половины ⟨часть⟩ EH, от AB же большая половины ⟨часть⟩ BG, то значит, остаток HD будет больше остатка GA. И поскольку HD больше GA, и отнимаются от HD половина HI, от GA же большая половины ⟨часть⟩ GK, то значит, остаток DI будет больше остатка AK. Но DI равно C; и значит, C больше AK. Значит, AK меньше C.

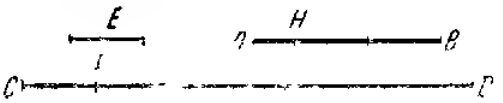
Итак, от величины AB остаётся величина AK, являющаяся меньшей заданной меньшей величины C, что и требовалось доказать.

Подобным же образом докажется и если бы отнимаемые были половинами (5, 6, 7, 8).

Предложение 2

Если для двух [заданных] неравных величин при постоянном попеременном) вычитании меньшей из большей остающееся никогда не будет измерять своего предшествующего, то величины будут несоизмеримыми.*

Пусть для двух, являющихся неравными, величин AB, CD, ⟨из которых⟩ меньшая AB, при постоянном попеременном вычитании меньшей из большей остаток никогда не измерит своего предшествующего; я утверждаю, что величины AB, CD будут несоизмеримыми (черт. 2).



Черт. 2.

Действительно, если они соизмеримы, то некоторая величина их измерит. Пусть, если возможно, она измеряет и будет E; и пусть AB, измеряя ID, оставит меньшую себя ⟨часть⟩ CI, CI же, измеряя BH, оставит меньшую себя ⟨часть⟩ AH, и пусть это происходит постоянно, пока не останется некоторая величина, которая будет меньше E. Пусть это случится и пусть останется AH, меньшая E. Поскольку теперь E измеряет AB, но AB измеряет DI, то значит, и E измерит ID. Она же измеряет и всю CD; значит, она измерит и остаток CI. Но CI измеряет BH; значит, и E измеряет BH. Она же измеряет и всю AB; значит, измерит и остаток AH, большая — меньшую; это же невозможно. Значит, никакая величина не измерит величин AB, CD; значит, величины AB, CD будут несоизмеримыми (определение 1).

Итак, если для двух неравных величин и т. д. (9).

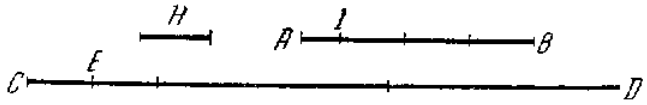
*) В тексте ἀνθυφαιρουμένου — тот же самый термин, что и в предложении 1 книги VII. Так как ἀντί значит «против, напротив», то операцию ἀνθυφαίρεσις следует мыслить как попеременное вычитание второй величины из первой, затем остатка первой из второй, остатка второй из остатка первой, причем мыслятся два ряда величин, в заглавии которых стоят обе заданные первоначально величины, а под каждой из них соответственно полученные вычитанием их остатки.

Предложение 3

Для двух данных соизмеримых величин найти их наибольшую общую меру.

Пусть данные две соизмеримые величины будут AB, CD, из которых меньшая AB; вот требуется для AB, CD найти наибольшую общую меру (черт. 3).

Величина AB или измеряет CD, или нет. Если теперь она измеряет, измеряет также и самоё себя, то значит, AB



Черт. 3.

будет общей мерой AB, CD; и ясно, что и наибольшей. Ибо ⟨величина⟩, большая величины AB, не будет измерять AB.

Тогда пусть AB не измеряет CD. И при постоянном попеременном вычитании меньшего из большего, остаток когда-нибудь измерит предшествующий ему, вследствие того, что AB, CD не являются несоизмеримыми (предложение 2); и пусть AB, измеряя ED, оставит меньшую себя EC; EC же, измеряя IB, пусть оставит меньшую себя AI; AI же пусть будет измерять CE.

Поскольку теперь AI измеряет CE, но CE измеряет IB, то значит, и AI измерит IB. Она же измеряет и самоё себя; значит, AI измерит и всю AB. Но AB измеряет DE; значит, и AI измерит ED. Она же измеряет и CE; значит, измеряет и всю CD; значит, AI будет общей мерой AB, CD. Вот я утверждаю, что и наибольшей. Действительно, если нет, то будет некоторая величина, большая AI, которая измерит AB, CD. Пусть это будет H. Поскольку теперь H измеряет AB, но AB измеряет ED, то значит, и H измерит ED. Она же измеряет и всю CD; значит, H измерит и остаток CE. Но CE измеряет IB; значит, и H измерит IB. Она же измеряет и всю AB, и измерит остаток AI, большая — меньшую; это же невозможно. Значит, никакая величина, большая AI, не измерит

AB, *CD*; значит, *AI* будет для *AB*, *CD* наибольшей общей мерой.

Итак, для двух данных соизмеримых величин *AB*, *CD* найдена наибольшая общая мера, что и требовалось доказать.

Следствие

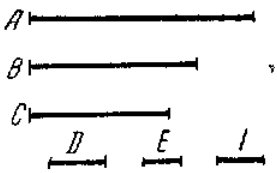
Вот из этого ясно, что если величина измеряет две величины, то она измерит и их наибольшую общую меру.

Предложение 4

Для трёх данных соизмеримых величин найти их наибольшую общую меру.

Пусть данные три соизмеримые величины будут *A*, *B*, *C*; вот требуется для *A*, *B*, *C* найти наибольшую общую меру (черт. 4).

Возьмём для двух ⟨величин⟩ *A*, *B* наибольшую общую меру, и пусть она будет *D* (предложение 3); тогда *D* или измеряет *C*, или не [измеряет]. Пусть сперва измеряет. Поскольку теперь *D* измеряет *C*, измеряет также и *A*, *B*, то значит, *D* измеряет *A*, *B*, *C*; значит, *D* для *A*, *B*, *C* будет общей мерой. И ясно, что и наибольшей, ибо ⟨величина⟩, большая величины *D*, не измеряет *A*, *B*.



Черт. 4.

Тогда пусть *D* не измеряет *C*. Я утверждаю сперва, что *C*, *D* будут соизмеримыми. Действительно, поскольку *A*, *B*, *C* соизмеримы, то их измерит некоторая величина, которая, конечно, измерит и *A*, *B*, так что она измерит и общую наибольшую меру *A*, *B*, ⟨т. е.⟩ *D* (предложение 3, следствие). Она же измеряет и *C*, так что упомянутая величина измерит *C*, *D*; значит, *C*, *D* будут соизмеримыми. Возьмём теперь их наибольшую общую меру (предложение 3), и пусть она будет *E*. Поскольку теперь *E* измеряет *D*, но *D* измеряет *A*, *B*, то значит, *E* измерит и *A*, *B*. Она же измеряет и *C*. Значит, *E* измеряет *A*, *B*, *C*, значит, *E* для *A*, *B*, *C* будет общей мерой. Вот я утвер-

ждаю, что и наибольшей. Действительно, если возможно, пусть будет некоторая большая E величина I и пусть она измеряет A, B, C. И поскольку I измеряет A, B, C, то значит, она измерит и A, B, измерит и наибольшую общую меру A, B (предложение 3, следствие). Наибольшая же общая мера A, B есть D; значит, I измеряет D. Она же измеряет и C; значит, I измеряет C, D; значит, I измерит и наибольшую общую меру C, D (там же). Она же есть E; значит, I измерит E, большая - меньшую; это же невозможно. Значит, никакая [величина], большая величины E, не измеряет A, B, C; значит, E будет наибольшей общей мерой A, B, C, если D не измеряет C, если же измеряет, то сама D.

Итак, для трёх данных соизмеримых величин найдена наибольшая общая мера [что и требовалось доказать].

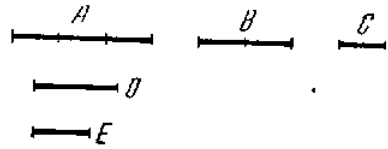
Следствие

Из этого вот ясно, что если величина измеряет три величины, то она будет измерять и их наибольшую общую меру.

Подобным же вот образом возьмётся наибольшая общая мера и для большего количества ⟨величин⟩, и результаты продвинутся далее, что и требовалось доказать.

Предложение 5

***Соизмеримые** величины имеют между **собой отношение, как число** к числу* (10).



Черт. 5.

Пусть соизмеримые величины будут A, B; я утверждаю, что A имеет к B отношение, как число к числу (черт. 5).

Действительно, поскольку A, B соизмеримы, то их измерит некоторая величина. Пусть она измеряет и будет C. И сколько раз C измеряет A, пусть столько единиц будет в D, сколько же раз C измеряет B, пусть столько единиц будет в E.

Поскольку теперь C измеряет A по ⟨количеству⟩ единиц в D, также и единица измеряет D по ⟨количеству⟩ единиц в нём, то значит, равное число раз единица измеряет число D, и величина C ⟨измеряет⟩ A; значит, будет, что как C к A, так и единица к D (определение 21 книги VII); значит, «обращая» (предложение 7 книги V, следствие), как A к C, так и D к единице. Затем, поскольку C измеряет B по ⟨количеству⟩ единиц в E, так же и единица измеряет E по ⟨количеству⟩ единиц в нём, то значит, равное число раз единица измеряет E, и C ⟨измеряет⟩ B; значит, будет (определение 21 книги VII), что как C к B, так и единица к E. Доказано же, что и как A к C, ⟨так и⟩ D к единице; «по равенству» (предложение 22 книги V), значит, будет, что как A к B, так и число D к E.

Итак, соизмеримые величины A, B имеют между собой отношение, как число D к числу E, что и требовалось доказать.

Предложение 6

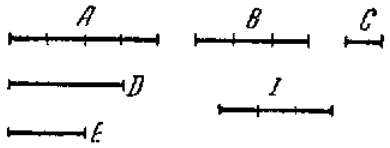
Если две величины имеют между собой отношение, как число к числу, то эти величины будут соизмеримыми.

Пусть две величины A, B имеют между собой отношение, как число D к числу E; я утверждаю, что величины A, B будут соизмеримыми (черт. 6).

Действительно, сколько будет в D единиц, на столько же равных ⟨частей⟩ разделим A, и пусть C будет равна одной из них; сколько же будет в E единиц, из стольких равных C величин составим I.

Поскольку теперь, сколько будет в D единиц, столько же и в A будет величин, равных C, то значит, какой частью D является единица, той же самой частью A является C; значит, будет, что как C к A, так и единица

к D (определение 21 книги VII). Единица же измеряет число D; значит, и C измеряет A. И поскольку будет, что как C к A, так и единица к [числу] D, то значит, «обращая» (предложение 7 книги V, следствие), как A к C, так и число D к единице. Затем, если сколько будет в E единиц, столько будет и в I равных C ⟨величин⟩, то значит, будет, что как C к I, так и единица к [числу] E (опре-



Черт. 6.

деление 21 книги VII). Доказано же, что и как A к C, так и D к единице; «по равенству» (предложение 22 книги V), значит, будет, что как A к I, так и D к E. Но как D к E, так будет и A к B; и значит, A как к B, так и к I. Значит, A к каждому из B, I имеет то же самое отношение; значит, B равно I (предложение 9 книги V). Также C измеряет I; значит, оно измеряет и B. Но вместе с тем и A; значит, C измеряет A, B. Значит, A соизмеримо с B.

Итак, если две величины имеют между собой и т. д. (11).

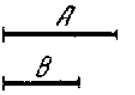
Следствие

Из этого вот ясно, что если будут два числа, как например, D, E, и прямая, как например A, то возможно сделать так, чтобы как число D к числу E, так и прямая к прямой. Если же для A, I взять среднюю пропорциональную, как например. B, то будет, что как A к I, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B, то-есть как первая к третьей, так и подобная и подобно построенная на первой ⟨фигура⟩ к ⟨такой же⟩ на второй (предложение 20 книги VI, следствие 2). Но как A к I, так будет и число D к числу E; значит, получилось, что и как число D к числу E, так и ⟨квадрат⟩ на прямой A к ⟨квадрату⟩ на прямой B, что и требовалось доказать.

Предложение 7

Несоизмеримые величины не имеют между собой отношения, как число к числу.

Пусть будут несоизмеримые величины A, B; я утверждаю, что A к B не имеет отношения, как число к числу (черт. 7).



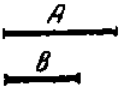
Черт. 7.

Действительно, если A имеет к B отношение, как число к числу, то A будет соизмерима с B (предложение 6). Она же не ⟨соизмерима⟩; значит, A не имеет к B отношения, как число к числу.

Итак, несоизмеримые величины не имеют между собой отношения и т. д.

Предложение 8

Если две величины не имеют между собой отношения, как число к числу, то эти величины будут несоизмеримыми.



Черт. 8.

Пусть две величины A, B не имеют между собой отношения, как число к числу; я утверждаю, что величины A, B будут несоизмеримыми (черт. 8).

Действительно, если они будут соизмеримыми, то A будет иметь к B отношение, как число к числу (предложение 5). Она же не имеет. Значит, величины A, B будут несоизмеримыми.

Итак, если две величины не имеют между собой и т. д.

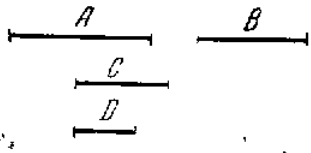
Предложение 9

Квадраты на линейно соизмеримых прямых имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу; и квадраты, имеющие между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу, будут иметь и стороны линейно соизмеримые. Квадраты же на линейно несоизмеримых прямых не будут иметь между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу; и квадраты, не имеющие между

собой отношения, как квадратное число к квадратному числу, не будут иметь и линейно соизмеримых сторон (12).

Пусть A, B будут линейно соизмеримыми; я утверждаю, что квадрат на A к квадрату на B имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу (черт. 9).

Действительно, поскольку A линейно соизмеримо с B, то значит, A имеет к B отношение, как число к числу (предложение 5). Пусть оно имеет ⟨отношение⟩, как C к D. Поскольку теперь будет, что как A к B, так и C к D, но отношение квадрата на A к квадрату на B будет двойным отношением A к B; ибо подобные фигуры находятся в двойном отношении соответственных сторон (предложение 20 книги VI, следствие); двойным же отношением [числа] C к [числу] D будет отношение квадрата на C к квадрату на D; ибо для двух квадратных чисел существует одно среднее пропорциональное число, и квадратное ⟨число⟩ к квадратному [числу] имеет двойное отношение стороны к стороне (предложение 11 книги VIII); значит, будет, что как квадрат на A к квадрату на B, так и квадратное [число] на C к квадратному [числу] на [числе] D.



Черт. 9.

Но вот пусть будет, что как квадрат на A к ⟨квадрату⟩ на B, так и квадрат на C к [квадрату] на D; я утверждаю, что A будет линейно соизмеримо с B.

Действительно, поскольку будет, что как квадрат на A к [квадрату] на B, так и квадрат на C к [квадрату] на D, но отношение квадрата на A к [квадрату] на B будет двойным отношением A к B, отношение же квадратного [числа] на [числе] C к квадратному [числу] на [числе] D будет двойным отношением [числа] C к [числу] D, то значит, будет, что и как A к B, так и [число] C к [числу] D. Значит, A имеет к B отношение, как число C к числу D; значит, A будет линейно соизмеримо с B (предложение 6).

Но вот пусть A будет линейно несоизмеримо с B; я утверждаю, что квадрат на A к [квадрату] на B не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу.

Действительно, если квадрат на A к [квадрату] на B имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу, то A будет соизмеримым с B. Но оно не будет; значит, квадрат на A к [квадрату] на B не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу.

Затем вот пусть квадрат на A к [квадрату] на B не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; я утверждаю, что A будет линейно несоизмеримо с B.

Действительно, если A соизмеримо с B, то квадрат на A к квадрату на B будет иметь отношение, как квадратное число к квадратному числу. Он же не имеет; значит, A не будет линейно соизмеримо с B.

Итак, квадраты на линейно соизмеримых и т. д. (13).

Следствие

И из доказанного будет ясно, что линейно соизмеримые всегда ⟨соизмеримы⟩ и в степени, ⟨соизмеримые⟩ же в степени не всегда ⟨соизмеримы⟩ и линейно, [поскольку квадраты на линейно соизмеримых прямых имеют отношение, как квадратное число к квадратному числу, имеющие же отношение, как число к числу, являются соизмеримыми. Так что линейно соизмеримые прямые соизмеримы не только линейно, но и в степени.

Далее, поскольку какие квадраты имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу, ⟨те⟩, как доказано, соизмеримы линейно и будут соизмеримыми в степени по той причине, что квадраты имеют отношение, как число к числу, то значит, какие квадраты не имеют отношения, как квадратное число к квадратному числу, но просто как число к числу, то эти квадраты будут соизмеримы в степени, но никак не линейно; так что линейно соизмеримые будут всегда ⟨соизмеримы⟩ и в степени, ⟨соизмеримые⟩ же в степени не всегда ⟨соизмеримы⟩ и линейно, если только они не имеют отношения, как квадратное число к квадратному числу.

Тогда я утверждаю, что [и] несоизмеримые линейно не всегда будут ⟨несоизмеримыми⟩ и в степени, поскольку соизмеримые в степени могут и не иметь отношения, как

квадратное число к квадратному числу, и вследствие этого соизмеримые в степени будут несоизмеримыми линейно. Так что несоизмеримые линейно не всегда ⟨несоизмеримы⟩ и в степени, но являющиеся несоизмеримыми линейно могут в степени быть и несоизмеримыми и соизмеримыми.

Несоизмеримые же в степени всегда несоизмеримы и линейно; действительно, если они линейно соизмеримы, то будут соизмеримы и в степени. Предполагаются же они несоизмеримыми; это же нелепо. Значит, несоизмеримые в степени всегда ⟨несоизмеримы⟩ и линейно]*).

Лемма (14)

Доказано в арифметических ⟨кингах⟩, что подобные плоскостные числа имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу (предложение 26 книги VIII), и что, если два числа имеют между собой отношение, как квадратное число к квадратному числу, то они будут подобными плоскостными числами**). И из этого ясно, что неподобные плоскостные числа, то-есть не имеющие пропорциональных сторон, не имеют между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу. Действительно, если они будут иметь, то будут подобными плоскостными; это же не предполагается. Значит, неподобные плоскостные числа не имеют между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу.

Предложение 10

К предложенной прямой приискать две несоизмеримые прямые, одну только линейно, другую же — и в степени.

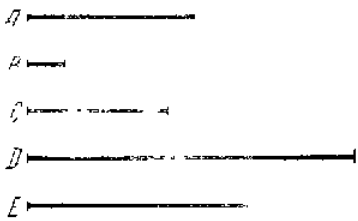
---

*) Почти весь текст следствия за исключением лишь начальных строк Гейберг считает неподлинным, основываясь и на разнице в языке с несомненно евклидовыми произведениями, а также и на том, что во второй половине следствия (со слов «тогда я утверждаю») доказывается больше того, что было предложено в начале.

**) По существу эта теорема у Евклида нигде не доказана, но она представляет положение, обратное предложению 26 книги VIII.

Пусть предложенная прямая будет A; вот требуется к A приискать две несоизмеримые прямые, одну — только линейно, другую же — и в степени (черт. 10).

Возьмём два числа B, C, не имеющих между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу, то-есть неподобные плоскостные (см. лемму), и сделаем, чтобы как B к C, так и квадрат на A к квадрату D, ибо мы выучились ⟨этому⟩ (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на A соизмерим с ⟨квадратом⟩ на D (предложение 6). И поскольку B к C не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на D не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, A будет линейно несоизмеримо с D (предложение 9).



Черт. 10.

Возьмём для A, D среднюю пропорциональную E: значит, будет, что как A к D, так и квадрат на A к ⟨квадрату⟩ на E (определение 9 книги V). Но A линейно несоизмеримо с D; значит, и квадрат на A несоизмерим с квадратом на E*); значит, A будет несоизмеримо с E в степени.

Итак, к предложенной прямой A приисканы две несоизмеримые прямые D, E, причем D — только линейно, E же — в степени и, конечно, линейно [что и требовалось доказать].

Предложение 11

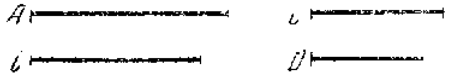
Если четыре величины будут пропорциональны, первая же соизмерима со второй, то и третья будет соизмерима с четвёртой; и если первая несоизмерима со второй, то и третья будет несоизмерима с четвёртой (15).

---

*) По существу это вытекает из следующего предложения (11-го), почему есть серьёзные основания полагать, что это предложение вместе с вводящей его леммой не принадлежит к числу подлинно евклидовских.

Пусть четыре величины A, B, C, D будут пропорциональны: как A к B, так и C к D; пусть же A будет соизмеримой с B; я утверждаю, что и C будет соизмеримой с D (черт. 11).

Действительно, поскольку A соизмерима с B, значит, A имеет к B отношение, как число к числу (предложение 5). И будет как A к B, так и C к D; и значит, C имеет к D отношение, как число к числу; значит, C будет соизмерима с D (предложение 6).



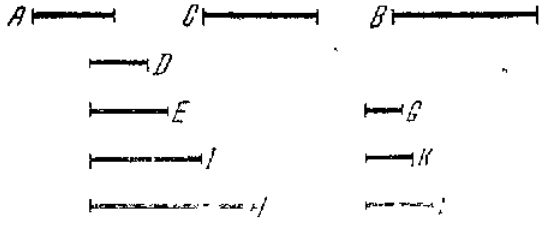
Черт. 11.

Но вот пусть A будет несоизмерима с B; я утверждаю, что и C будет несоизмеримой с D. Действительно, поскольку A несоизмерима с B, то значит, A не имеет к B отношения, как число к числу (предложение 7). И будет как A к B, так и C к D; значит, и C не имеет к D отношения, как число к числу; значит, C будет несоизмерима с D (предложение 8).

Итак, если четыре величины и т. д.

Предложение 12

Соизмеримые с одной и той же величиной будут соизмеримы и между собой.



Черт. 12.

Пусть каждая из A, B будет соизмеримой с C. Я утверждаю, что и A будет соизмерима с B (черт. 12).

Действительно, поскольку A соизмерима с C, то значит, A имеет к C отношение, как число к числу (предложение 5). Пусть она имеет ⟨отношение⟩ как D к E. Затем, поскольку C соизмерима с B, то значит, C имеет к B отношение, как число к числу (предложение 5). Пусть она имеет ⟨отношение⟩, как I к H. И для всяких заданных отношений, т. е. тех, какие имеют D к E и I к H, возьмём последовательно числа в заданных отношениях, ⟨а именно⟩, G, K, L (предложение 4 книги VIII); так, что будет как D к E, так и G к K, как же I к H, так и K к L.

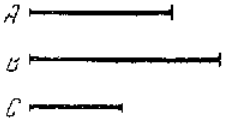
Поскольку теперь будет, что как A к C, так и D к E, но как D к E, так и G к K, то значит, будет, что и как A к C, так и G к K (предложение 11 книги V). Затем, поскольку будет как C к B, так и I к H, но как I к H, [так и] K к L, то значит, как C к B, так и K к L. Было же и как A к C, так и G к K; значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет, что как A к B, так и G к L. Значит, A имеет к B отношение, как число G к числу L; значит, A будет соизмерима с B (предложение 6).

Итак, соизмеримые с одной и той же величиной будут соизмеримы и между собой, что и требовалось доказать.

Предложение 13

Если будут две соизмеримые величины, одна же из них несоизмерима с некоторой величиной, то и оставшаяся будет с ней несоизмерима.

Пусть будут две соизмеримые величины A, B, одна же из них A пусть будет несоизмерима с некоторой другой C; я утверждаю, что и оставшаяся B будет с C несоизмерима (черт. 13).



Черт. 13.

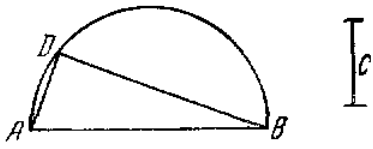
Действительно, если B соизмерима с C, но и A соизмерима с B, то значит, A будет соизмерима с C (предложение 12). Но она и несоизмерима; это же невозможно. Значит, не будет B с C соизмерима; значит, несоизмерима.

Итак, если будут две соизмеримые величины и т. д. (15).

Лемма

Для двух данных неравных прямых найти, чем больше в квадратах *) будет большая ⟨по сравнению с⟩ меньшей (16).

Пусть две данные неравные прямые будут AB, C, из которых большая пусть будет AB; вот требуется найти, чем больше в квадратах будет AB ⟨по сравнению с⟩ C (черт. 14).



Черт. 14.

Опишем на AB полукруг ADB, и в него вставим (определение 7 книги IV) равную C ⟨прямую⟩ AD (предложение 1 книги IV), и соединим DB. Ясно вот, что угол ADB будет прямым (предложение 31 книги III) и что в квадратах AB будет на DB больше AD, то-есть C (предложение 47 книги I).

Подобным же образом и для двух данных прямых квадрирующая **) их находится таким образом.

Пусть данные две прямые будут AD, DB и пусть должно найти их квадрирующую. Отложим ⟨их⟩ так, чтобы они заключали прямой угол, который между AD, DB, и соединим AB; тогда ясно, что квадрирующая AD, DB будет AB (предложение 47 книги I), что и требовалось доказать.

Предложение 14

Если будут четыре пропорциональные прямые, в квадратах же первая будет больше второй на ⟨квадрат⟩ на [линейно] с ней соизмеримой, то и третья будет в квадратах больше четвёртой на квадрат на [линейно] с ней соизмеримой. И если в квадратах первая будет больше второй на ⟨квадрат⟩ на [линейно] с ней несоизмеримой, то и третья будет в квадратах больше четвёртой на ⟨квадрат⟩ на [линейно] с ней несоизмеримой.

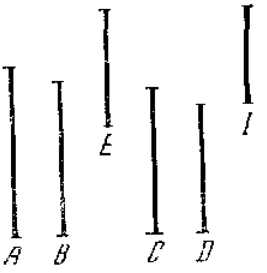
---

*) В подлиннике τίνι μεῖζον δύναται — чем больше квадрирует, т. е. для $a > b$ находится разность $\sqrt{a^2 - b^2}$.

**) В тексте δυναμένη — дающая квадрат, равный сумме квадратов на заданных прямых, т. е. $\sqrt{a^2 + b^2}$.

Пусть будут четыре пропорциональные прямые A, B, C, D, как A к B, так и C к D, и пусть в квадратах A будет больше B на ⟨квадрат⟩ на E, C же в квадратах будет больше D на ⟨квадрат⟩ на I; я утверждаю, что если A будет соизмерима с E, то и C будет соизмерима с I, если же несоизмерима будет A с E, то несоизмерима будет и C с I (черт. 15).

Действительно, поскольку как A к B, так и C к D, то значит, будет, что и как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B, так и ⟨квадрат⟩ на C к ⟨квадрату⟩ на D (предложение 22 книги VI). Но ⟨квадрату⟩ на A равны ⟨квадраты⟩ на E, B, ⟨квадрату⟩ же на C равны ⟨квадраты⟩ на D, I. Значит, будет, что как ⟨квадраты⟩ на E, B к ⟨квадрату⟩ на B, так и ⟨квадраты⟩ на D, I к ⟨квадрату⟩ на D; значит, «выделяя» (предложение 17 книги V), будет как ⟨квадрат⟩ на E к ⟨квадрату⟩ на B, так и ⟨квадрат⟩ на I к ⟨квадрату⟩ на D; значит, будет (предложение 22 книги VI), что и как E к B, так и I к D; значит, «обращая» (предложение 7 книги V, следствие), будет, как B к E, так и D к I. Но также и как A к B, так и C к D; значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет как A к E, так и C к I. Если теперь A соизмерима с E, то и C будет соизмерима с I; если же A несоизмерима с E, то и C несоизмерима будет с I (предложение 11).



Черт. 15.

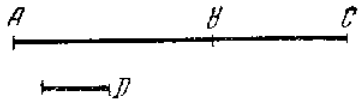
Итак, если и т. д.

Предложение 15

Если две соизмеримые величины составляются ⟨вместе⟩, то и целое будет с каждой из них соизмеримо; и если целое соизмеримо с одной из них, то и первоначальные величины будут соизмеримы (17).

Составим две соизмеримые величины AB, BC; я утверждаю, что и целое AC будет с каждой из AB, BC соизмеримо (черт. 16).

Действительно, поскольку AB, BC соизмеримы, то их измерит некоторая величина. Пусть она ⟨их⟩ измеряет и будет D. Поскольку теперь D измеряет AB, BC, то она измерит и всю AC. Она же измеряет и AB, BC. Значит, D измеряет AB, BC, AC; значит, AC будет соизмерима с каждой из AB, BC (определение 1).



Черт. 16.

Но вот пусть AC будет соизмерима с AB; я утверждаю вот, что и AB, BC будут соизмеримы.

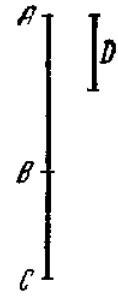
Действительно, поскольку AC, AB соизмеримы, то их измерит некоторая величина. Пусть она ⟨их⟩ измеряет и будет D. Поскольку теперь D измеряет CA, AB, то она измерит и остаток BC. Она же измеряет и AB; значит, D измерит AB, BC; значит, AB, BC соизмеримы.

Итак, если две соизмеримые величины и т. д.

Предложение 16

Если две несоизмеримые величины составляются ⟨вместе⟩, то и целое будет с каждой из них несоизмеримо; и если целое несоизмеримо с одной из них, то и первоначальные величины будут несоизмеримы.

Составим две несоизмеримые величины AB, BC; я утверждаю, что и целое AC будет с каждой из AB, BC несоизмеримо (черт. 17).



Черт. 17.

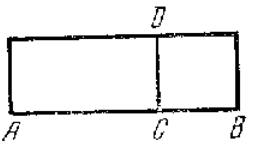
Действительно, если не будут несоизмеримы CA, AB, то [их] измерит некоторая величина. Пусть она измеряет, если возможно, и будет D. Поскольку теперь D измеряет CA, AB, то значит, она измерит и остаток BC. Она же измеряет и AB; значит, D измеряет AB, BC. Значит, AB, BC соизмеримы; они же предположены и несоизмеримыми; это же невозможно. Значит, никакая величина не измерит CA, AB; значит, CA, AB несоизмеримы. Подобным же вот образом докажем, что и AC, CB будут несоизмеримы. Значит, AC будет несоизмерима с каждой из AB, BC.

Но вот пусть AC будет несоизмерима с одной из AB, BC. Пусть вот сперва с AB; я утверждаю, что и AB, BC несоизмеримы. Действительно, если они будут соизмеримы, то их измерит некоторая величина. Пусть она измеряет и будет D. Поскольку теперь D измеряет AB, BC, то значит, она измерит и всю AC. Она же измеряет и AB; значит, D измеряет CA, AB. Значит, CA, AB соизмеримы; они же предположены и несоизмеримыми; это же невозможно. Значит, никакая величина не измерит AB, BC; значит, AB, BC несоизмеримы.

Итак, если две несоизмеримые величины и т. д.

Лемма

Если к некоторой прямой прилагается*) параллелограмм**) с недостатком в виде квадрата, то приложенный ⟨параллелограмм⟩ равен ⟨прямоугольнику⟩ на отрезках прямой, возникших из приложения.



Черт. 18.

Пусть к прямой AB будет приложен параллелограмм AD с недостатком в виде квадрата DB; я утверждаю, что AD равен ⟨прямоугольнику⟩ на AC, CB (черт. 18).

И это само по себе ясно; ибо поскольку DB квадрат, то DC равно будет CB, и AD есть ⟨прямоугольник⟩ между AC, CD, то-есть ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB.

Итак, если к некоторой прямой и т. д.

Предложение 17

Если будут две неравные прямые, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей, и если

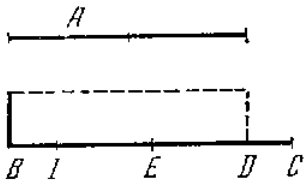
---

*) παραβλῆθῆ, παραβολή — знаменитое «приложение» площадей («Начала», I, 44; II, 5, 6; VI, 27, 28, 29).

**) Здесь (впервые у Евклида) «параллелограмм» употребляется в смысле прямоугольника; у Архимеда подобное понимание термина «параллелограмм» является обычным.

⟨он⟩ разделяет её на соизмеримые линейно ⟨части⟩, то в квадратах большая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой [линейно] ⟨прямой⟩. И если в квадратах бо́льшая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой [линейно] ⟨прямой⟩, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четверти ⟨квадрата⟩ на меньшей, то он разделяет её на соизмеримые линейно ⟨отрезки⟩.

Пусть будут две неравные прямые A, BC, из которых большая BC; к BC же пусть будет приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей A, то-есть ⟨квадрату⟩ на половине A, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC; пусть же BD будет линейно соизмерима с DC; я утверждаю, что в квадратах BC будет больше A на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩ (черт. 19).



Черт. 19.

Действительно, разделим BC пополам в точке E и отложим EI, равную DE. Значит, остаток DC будет равен BI. И поскольку прямая BC рассечена на равные в E, на неравные же в D ⟨части⟩, то значит, (предложение 5 книги II) заключающийся между BD, DC прямоугольник вместе с квадратом на ED будет равен квадрату на EC; ⟨равны также будут⟩ и учетверённые; значит, четырежды ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC вместе с учетверённым ⟨квадратом⟩ на DE равен четырежды квадрату на EC. Но учетверённому ⟨прямоугольнику⟩ между BD, DC равен квадрат на A, учетверённому же ⟨квадрату⟩ на DE равен квадрат на DI, ибо DI есть удвоенная DE. Учетверённому же ⟨квадрату⟩ на EC равен квадрат на BC; ибо опять BC будет удвоенной CE. Значит, квадраты на A, DI ⟨вместе⟩ равны квадрату на BC; так что ⟨квадрат⟩ на BC будет ⟨квадратом⟩ на DI больше ⟨квадрата⟩ на A; значит, в квадратах BC больше A на DI. Должно показать, что BC будет и соизмерима с DI. Действительно, поскольку BD соизмерима с DC линейно, то значит, и BC будет соизмерима с CD линейно (предложение 15). Но CD соизмерима

линейно с CD, BI, ибо CD равна BI. И значит, BC соизмерима с BI, CD линейно (предложение 12); так что BC будет соизмерима линейно и с остатком ID; значит, в квадратах BC больше A на ‹квадрат› на соизмеримой с собой ‹прямой›.

Но вот пусть BC в квадратах будет больше A на ‹квадрат› на соизмеримой с собой ‹прямой›, пусть же к BC будет приложен с недостатком в виде квадрата ‹параллелограмм›, равный четверти ‹квадрата› на A, и пусть это будет ‹прямоугольник› между BD, DC. Должно доказать, что BD соизмерима с DC линейно.

Действительно, приготовив то же самое, подобным же образом докажем, что в квадратах BC больше A на ‹квадрат› на ID. В квадратах же BC больше A на ‹квадрат› на соизмеримой с собой ‹прямой›. Значит, BC будет линейно соизмерима с ID; так что BC будет линейно соизмерима и с остатком — вместе взятыми BI, DC (предложение 15). Но вместе взятые BI, DC соизмеримы с DC [линейно]. Так что и BC будет соизмерима с CD линейно (предложение 12); значит, и «выделяя», BD будет соизмерима с DC линейно.

Итак, если будут две неравные прямые и т. д. (18).

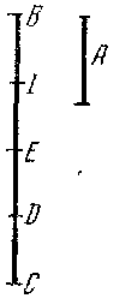
Предложение 18

Если будут две неравные прямые, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ‹параллелограмм›, равный четвёртой части ‹квадрата› на меньшей, и если он разделяет её на несоизмеримые [линейно] ‹части›, то в квадратах большая будет больше меньшей на ‹квадрат› на несоизмеримой с собой ‹прямой›. И если в квадратах большая будет больше меньшей на ‹квадрат› на несоизмеримой с собой ‹прямой›, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ‹параллелограмм›, равный четверти ‹квадрата› на меньшей, то он разделяет её на несоизмеримые [линейно] ‹отрезки›.

Пусть будут две неравные прямые A, BC, из которых большая BC; к BC же пусть будет приложен с недостатком в виде квадрата ‹параллелограмм›, равный четвёртой

[части] ⟨квадрата⟩ на меньшей A, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC; пусть же BD будет линейно несоизмерима с DC; я утверждаю, что в квадратах BC будет больше A на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩ (черт. 20).

Действительно, приготовив то же самое, что и выше, подобным же образом докажем, что в квадратах BC больше A на ⟨квадрат⟩ на ID. Должно показать [теперь], что BC будет линейно несоизмерима с DI. Действительно, поскольку BD несоизмерима с DC линейно, то значит, и BC будет несоизмерима с CD линейно (предложение 16). Но DC соизмерима с вместе взятыми BI, DC (предложение 6); и значит, BC несоизмерима с вместе взятыми BI, DC (предложение 13). Так что BC будет несоизмерима линейно и с остатком ID (предложение 16). И в квадратах BC больше A на ⟨квадрат⟩ на ID; значит, в квадратах BC больше A на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩.



Черт. 20.

Затем пусть BC в квадратах будет больше A на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩; пусть же к BC будет приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четверти ⟨квадрата⟩ на A, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC. Должно показать, что BD несоизмерима с DC линейно.

Действительно, приготовив то же самое, подобным же образом докажем, что в квадратах BC больше A на ⟨квадрат⟩ на ID. Но в квадратах BC больше A на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩. Значит, BC будет линейно несоизмерима с ID; так что BC будет несоизмерима и с остатком — вместе взятыми BI, DC (предложение 16). Но вместе взятые BI, DC соизмеримы с DC линейно (предложение 6); значит, и BC будет несоизмерима с DC линейно (предложение 13); так что, и «выделяя», BD будет несоизмерима с DC линейно (предложение 16).

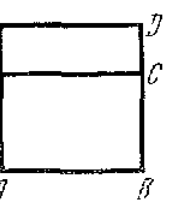
Итак, если будут две неравные прямые и т. д. (19, 20, 21, 22).

Лемма (23)

Поскольку доказано (предложение 9, следствие), что соизмеримые линейно всегда [будут соизмеримы] и в степени, ⟨соизмеримые⟩ же в степени не всегда будут соизмеримыми и линейно, но могут быть линейно и соизмеримыми и несоизмеримыми, то ясно, что если с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ какая-нибудь прямая будет соизмерима линейно, то она называется рациональной и соизмеримой с ней не только линейно, но и в степени, поскольку соизмеримые линейно будут всегда ⟨соизмеримы⟩ и в степени. Если же с отложенной рациональной какая-нибудь ⟨прямая⟩ будет соизмерима в степени, то, если она ⟨соизмерима⟩ и линейно, она и в таком случае называется рациональной и соизмеримой с ней линейно и в степени. Если же какая-нибудь ⟨прямая⟩, будучи опять соизмеримой в степени с отложенной рациональной, будет с ней несоизмерима линейно, то она и в таком случае называется рациональной соизмеримой только в степени.

Предложение 19

Прямоугольник, заключённый между рациональными линейно соизмеримыми в каком-нибудь из вышеуказанных смыслов прямыми, будет рациональным.



Черт. 21.

Пусть прямоугольник AC заключается между рациональными линейно соизмеримыми прямыми AB, BC; я утверждаю, что AC будет рациональным (черт. 21).

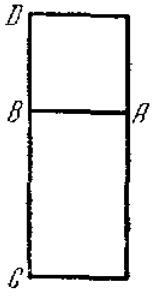
Действительно, построим на AB квадрат AD; значит, AD будет рациональным (определение 4). И поскольку AB соизмерима с BC линейно, AB же равна BD, то значит, BD будет соизмерима с BC линейно. И будет, что как BD к BC, так и DA к AC (предложение 1 книги VI). Значит, DA будет соизмерим с AC. Но DA рационален; значит, будет рациональным и AC.

Итак, прямоугольник, заключённый между рациональными линейно соизмеримыми и т. д.

Предложение 20

Если рациональная ⟨площадь⟩ прикладывается к рациональной ⟨прямой⟩, то производит ширину, рациональную и линейно соизмеримую с той, к которой прикладывается.

Пусть рациональная ⟨площадь⟩ AC будет приложена к рациональной опять в одном из вышеуказанных смыслов прямой AB, образуя ширину BC; я утверждаю, что BC будет рациональна и с BA линейно соизмерима (черт. 22).



Черт. 22.

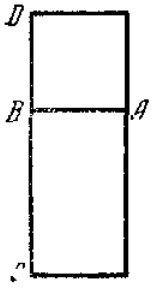
Действительно, построим на AB квадрат AD; значит, AD будет рациональным (определение 4). Также и AC рационален; значит, DA будет соизмерим с AC. И будет, что как DA к AC, так и DB к BC (предложение 1 книги VI). Значит, и DB будет соизмерима с BC (предложение 11); DB же равна BA; значит, и AB будет соизмерима с BC. Но AB рациональна; значит, и BC будет рациональной и соизмеримой с AB линейно.

Итак, если рациональная ⟨площадь⟩ прикладывается к рациональной ⟨прямой⟩ и т. д.

Предложение 21

Прямоугольник, заключённый между рациональными соизмеримыми только в степени прямыми, будет иррациональным и его квадрирующая будет иррациональной; пусть же она называется медиалью).*

Пусть прямоугольник AC заключён между рациональными соизмеримыми только в степени прямыми AB, BC; я утверждаю, что AC иррационален и квадрирующая его иррациональна; пусть же она называется медиалью (черт. 23).



Черт. 23.

---

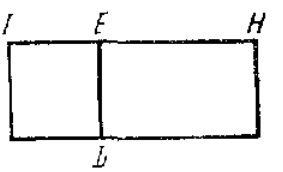
*) В подлиннике μέση — средняя. Латинский термин, употреблённый Герхардом Кремонским — первым переводчиком Евклида, будет medialis.

Действительно, построим на AB квадрат AD; значит, AD будет рациональным (определение 4). И поскольку AB несоизмерима с BC линейно, ибо они предполагаются соизмеримыми только в степени, AB же равна BD, то значит, и DB будет несоизмерима с BC линейно. И будет, что как DB к BC, так и AD к AC (предложение 1 книги VI); значит, DA несоизмерим с AC (предложение 11). Но DA рационален; значит, AC будет иррационален (определение 4), так что и квадрирующая AC [то-есть квадрирующая равный ему квадрат] будет иррациональна; пусть же она называется медиалью; это и требовалось доказать (24).

Лемма

Если будут две прямые, то как первая ко второй, так и ⟨квадрат⟩ на первой к ⟨прямоугольнику⟩ между обеими прямыми.

Пусть будут две прямые IE, EH. Я утверждаю, что как IE к EH, так и ⟨квадрат⟩ на IE к ⟨прямоугольнику⟩, между IE, EH (черт. 24).



Черт. 24.

Действительно, построим на IE квадрат DI и дополним HD. Поскольку теперь будет, что как IE к EH, так и ID к DH, и ID есть ⟨квадрат⟩ на IE, DH же ⟨прямоугольник⟩ между DE, EH, то-есть между IE, EH, то значит, будет, что как IE к EH, так и ⟨квадрат⟩ на IE к ⟨прямоугольнику⟩ между IE, EH. Подобным же вот образом и как ⟨прямоугольник⟩ между HE, EI к ⟨квадрату⟩ на EI, то-есть как HD к ID, так и HE к EI, что и требовалось доказать.

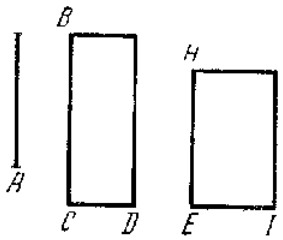
Предложение 22

Квадрат на медиали, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, производит ширину, рациональную и несоизмеримую линейно с той, к которой он прилагается.

Пусть медиаль будет A, рациональная же ⟨прямая⟩ CB, и пусть равная ⟨квадрату⟩ на A прямоугольная площадь BD

будет приложена к BC, производя ширину CD; я утверждаю, что CD будет рациональной и несоизмеримой линейно с CB (черт. 25).

Действительно, поскольку A — медиаль, то она квадрирует площадь, заключённую между рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩ (предложение 21). Пусть она будет квадрировать HI. Также она квадрирует и BD; значит, BD равен HI. Он же и равноуголен с ним; у равных же и равноугольных параллелограммов стороны при равных углах обратно пропорциональны (предложение 14 книги VI); значит, будет пропорция — как BC к EH, так и EI к CD. Значит, будет и как ⟨квадрат⟩ на BC к ⟨квадрату⟩ на EH, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на CD (предложение 20 книги VI). ⟨Квадрат⟩ же на CB соизмерим с ⟨квадратом⟩ на EH, ибо каждая из этих ⟨прямых⟩ рациональна; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CD (предложение 11). ⟨Квадрат⟩ же на EI рационален; значит, рационален и ⟨квадрат⟩ на CD (определение 4); значит, будет рациональна и CD. И поскольку EI несоизмерима с EH линейно (ибо они соизмеримы только в степени), как же EI к EH, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨прямоугольнику⟩ между IE, EH (см. лемму), то значит, ⟨квадрат⟩ на EI будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между IE, EH (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на EI соизмерим ⟨квадрат⟩ на CD, ибо они рациональны в степени; ⟨с прямоугольником⟩ же между IE, EH соизмерим ⟨прямоугольник⟩ между DC, CB, ибо они равны ⟨квадрату⟩ на A; значит, и ⟨квадрат⟩ на CD будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между DC, CB (предложение 13). Как же ⟨квадрат⟩ на CD к ⟨прямоугольнику⟩ между DC, CB, так будет и DC к CB (см. лемму); значит, DC будет линейно несоизмерима с CB (предложение 11). Значит, CD будет рациональна и несоизмерима линейно с CB, что и требовалось доказать.



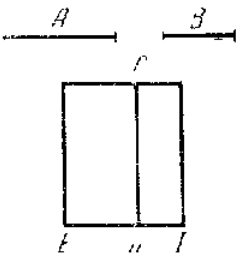
Черт. 25.

Предложение 23

Соизмеримая с медиалью есть медиаль.

Пусть будет медиаль A и пусть с A будет соизмерима B; я утверждаю, что и B будет медиалью (черт. 26).

Действительно, отложим рациональную ⟨прямую⟩ CD и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на A прямоугольную площадь CE, производящую ширину ED; значит, ED будет рациональной и несоизмеримой с CD линейно (предложение 22). К CD также приложим равную ⟨квадрату⟩ на B прямоугольную площадь CI, производящую ширину DI. Поскольку теперь A соизмерима с B, то и ⟨квадрат⟩ на A будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на B. Но квадрату на A равен EC, ⟨квадрату⟩ же на B равен CI; значит, EC соизмерим с CI. И будет, что как EC к CI, так и ED к DI (предложение 1 книги VI); значит, ED соизмерима с DI линейно (предложение 11). Но ED рациональна и несоизмерима с DC линейно; значит, и DI будет рациональна (определение 3) и несоизмерима с DC линейно (предложение 13); значит, CD, DI будут рациональные, соизмеримые только в степени. Квадрирующая же ⟨прямоугольник⟩ между рациональными, соизмеримыми только в степени, есть медиаль (предложение 21). Значит, квадрирующая ⟨прямоугольник⟩ на CD, DI будет медиалью; и ⟨прямоугольник⟩ между CD, DI квадрируется B; значит, B есть медиаль.



Черт. 26.

Следствие

Из этого тогда ясно, что ⟨площадь⟩, соизмеримая с медиальной площадью, есть медиальная [ибо их квадрируют прямые, которые будут соизмеримыми в степени и одна из которых медиаль; так что и остающаяся будет медиалью] *).

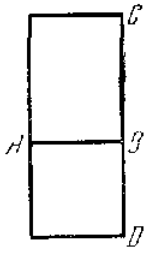
*) В тексте [δύνανται γὰρ αὐτὰ εὐθεῖαι, αἵ εἰσι δυνάμει σύμμετροι, ὧν ἡ ἑτέρα μέση· ὥστε καὶ ἡ λοιπὴ μέση ἐστίν]. Слова эти, как не совсем ясные, Гейберг оставил без перевода, считая их неподлинными.

[Лемма] (23)

Совершенно так же, как из сказанного относительно рациональных (предложение 18, следствие), следует и относительно медиалей, ⟨а именно, что прямая⟩, линейно соизмеримая с медиалью, называется медиалью и соизмеримой с ней не только линейно, но и в степени, поскольку вообще соизмеримые линейно всегда ⟨соизмеримы⟩ и в степени. Когда же какая-нибудь ⟨прямая⟩ будет соизмерима с медиалью в степени, то, если она и линейно ⟨с ней соизмерима⟩, то в таком случае ⟨обе прямые⟩ называются медиалями и соизмеримыми линейно и в степени, если же только в степени, то называются медиалями, соизмеримыми только в степени.

Предложение 24

Прямоугольник, заключённый между медиальными линейно соизмеримыми в каком-нибудь из указанных смыслов прямыми, будет медиальным.



Черт. 27.

Пусть прямоугольник AC заключается между медиальными линейно соизмеримыми прямыми AB, BC; я утверждаю, что AC будет медиальным (черт. 27).

Действительно, построим на AB квадрат AD; значит, AD будет медиальным. И поскольку AB соизмерима с BC линейно, AB же равна BD, то значит, и DB соизмерима с BC линейно; так что и DA будет соизмерим с AC (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Но DA медиален; значит, и AC медиален (предложение 23, следствие); что и требовалось доказать.

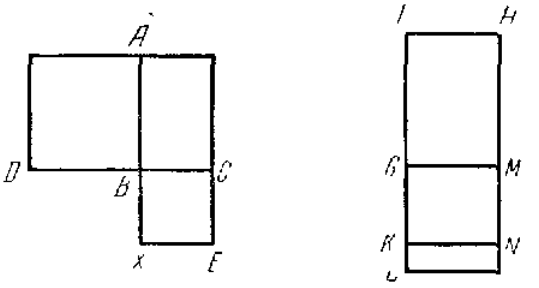
Предложение 25

Прямоугольник, заключённый между медиальными соизмеримыми только в степени прямыми, будет или рациональным или медиальным.

Пусть прямоугольник AC заключается между медиальными, соизмеримыми только в степени прямыми AB, BC;

я утверждаю, что AC будет или рациональным или медиальным (черт. 28).

Действительно, построим на AB, BC квадраты AD, BE; значит, каждый из AD, BE будет медиальным. И отложим рациональную ⟨прямую⟩ IH и приложим к IH равный AD прямоугольный параллелограмм HG, производящий ширину IG; к GM же приложим равный AC прямоугольный параллелограмм MK, производящий ширину GK; и ещё подобным же образом к KN приложим равный BE ⟨параллелограмм⟩ NL, производящий ширину KL; значит, IG, GK, KL будут по



Черт. 28.

прямой. Поскольку теперь каждый из AD, BE будет медиальным, и AD равен HG, BE же ⟨равен⟩ NL, то значит, и каждый из HG, NL медиален. И прилежат они к рациональной IH; значит, каждая из IG, KL будет рациональной и несоизмеримой с IH линейно (предложение 22). И поскольку AD соизмерим с BE, то значит, и HG соизмерим с NL. И будет, что как HG к NL, так и IG к KL (предложение 1 книги VI); значит, IG будет соизмерима с KL линейно (предложение 11). Значит, IG, KL будут рациональными линейно соизмеримыми; значит, ⟨прямоугольник⟩ между IG, KL рационален (предложение 19). И поскольку DB равна BA, XB же ⟨равна⟩ BC, то значит, будет, что как DB к BC, так и AB к BX. Но как DB к BC, так и DA к AC (предложение 1 книги VI); как же AB к BX, так и AC к CX; значит, будет, что как DA к AC, так и AC к CX. Но AD равен HG, AC же MK, CX же NL; значит, будет, что как HG к MK, так и MK к NL; значит, будет, что и как IG к GK, так и GK к KL (предложение 1

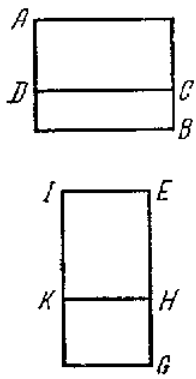
книги VI); значит, ⟨прямоугольник⟩ между IG, KL равен ⟨квадрату⟩ на GK (предложение 17 книги VI). ⟨Прямоугольник⟩ же между IG, KL рационален; значит, будет рациональным и квадрат на GK; значит, GK рациональна. И если она соизмерима с IH линейно, то GN будет рациональным (предложение 19); если же она несоизмерима с IH линейно, то KG, GM будут рациональными соизмеримыми только в степени; значит, GN будет медиальным (предложение 21). Итак, GN будет или рациональным или медиальным. Но GN равен AC; значит, AC будет или рациональным или медиальным.

Итак, прямоугольник, заключённый между медиальными соизмеримыми только в степени и т. д.

Предложение 26

Медиальная медиальную ⟨площадь⟩ не превышает на рациональную (черт. 29).

Действительно, если возможно, пусть медиальная ⟨площадь⟩ AB превышает медиальную AC на рациональную DB; и отложим рациональную ⟨прямую⟩ EI и к EI приложим равный AB прямоугольный параллелограмм IG, производящий ширину EG, и отнимем IH, равный AC; значит, остаток BD будет равен остатку KG. Но DB рационален; значит, будет рациональным и KG. Поскольку теперь каждый из AB, AC медиален, и AB равен IG, AC же ⟨равен⟩ IH, то значит, и каждый из IG, IH будет медиальным. И прилежат они к рациональной EI; значит, каждая из GE, EH будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно (предложение 22). И поскольку рационален {DB и равен KG, то значит, будет рационален и } KG *). И прилежит к рациональной EI; значит, и HG будет рациональной



Черт. 29.

*) Слова, поставленные в фигурных скобках, Гейберг считает излишними и, возможно, позднейшей вставкой, хотя и не выделяет их особо в тексте.

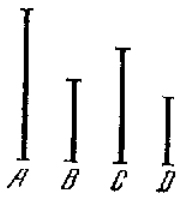
и соизмеримой с EI линейно (предложение 20). Но и EH рациональна и несоизмерима с EI линейно; значит, EH будет несоизмерима с HG линейно (предложение 13). И будет, что как EH к HG, так и ⟨квадрат⟩ на EH к ⟨прямоугольнику⟩ между EH, HG (предложение 21, лемма); значит, несоизмерим будет ⟨квадрат⟩ на EH с ⟨прямоугольником⟩ между EH, HG (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на EH соизмеримы квадраты на EH, HG, ибо оба рациональны; с ⟨прямоугольником⟩ же между EH, HG соизмерим дважды ⟨взятый прямоугольник между⟩ EH, HG (предложение 6), ибо он вдвое его больше; значит, ⟨квадраты⟩ на EH, HG будут несоизмеримыми с дважды ⟨взятым прямоугольником⟩ между EH, HG (предложение 13); значит, и вместе взятые ⟨квадраты⟩ на EH, HG и дважды ⟨прямоугольник⟩ между EH, HG — это же есть ⟨квадрат⟩ на EG (предложение 4 книги II) — будут несоизмеримы с ⟨квадратами⟩ на EH, HG (предложение 16). ⟨Квадраты⟩ же на EH, HG рациональны; значит, ⟨квадрат⟩ на EG иррационален (определение 4). Значит, EG будет иррациональна. Но она и рациональна; это же невозможно.

Итак, медиальная медиальную ⟨площадь⟩ не превышает на рациональную, что и требовалось доказать.

Предложение 27

Найти соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную ⟨площадь⟩ (26).

Отложим две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ A, B, и возьмём для A, B среднюю пропорциональную C (предложение 13 книги VI), и сделаем, чтобы как A к B, так и C к D (предложение 12 книги VI) (черт. 30).



Черт. 30.

И поскольку A, B рациональные соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩, то значит, ⟨прямоугольник⟩ между A, B, то-есть ⟨квадрат⟩ на C, будет медиальным (предложение 21). Значит, C есть медиаль (предложение 21). И поскольку будет, что как A к B, [так и] C к D, ⟨прямые⟩ же A, B

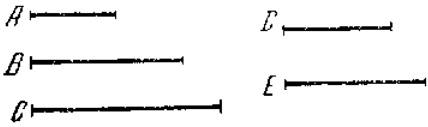
соизмеримы только в степени, то значит, и C, D будут соизмеримыми только в степени (предложение 11). И C есть медиаль; значит, и D медиаль (предложение 23). Значит, C, D будут медиали, соизмеримые только в степени. Я утверждаю, что они и заключают рациональную ⟨площадь⟩. Действительно, поскольку как A к B, так и C к D, то значит, перестановкой (предложение 16 книги V) будет, что как A к C, ⟨так и⟩ B к D. Но как A к C, ⟨так и⟩ C к B; и значит, как C к B, так и B к D (предложение 11 книги V); значит, ⟨прямоугольник⟩ между C, D равен будет ⟨квадрату⟩ на B (предложение 17 книги VI). ⟨Квадрат⟩ же на B рационален; значит, [будет] рациональным и ⟨прямоугольник⟩ между C, D.

Итак найдены соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную ⟨площадь⟩, что и требовалось доказать.

Предложение 28

Найти соизмеримые только в степени медиали, заключающие медиальную ⟨площадь⟩.

Отложим [три] рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ A, B, C, и возьмём для A, B среднюю пропорциональную D (предложение 13 книги VI), и сделаем, чтобы как B к C, так и D к E (предложение 12 книги VI) (черт. 31).



Черт. 31.

Поскольку A, B рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩, то значит, ⟨прямоугольник⟩ между A, B, то-есть ⟨квадрат⟩ на D (предложение 21), будет медиальным. Значит, D медиаль (предложение 21). И поскольку B, C соизмеримы только в степени, и как B к C, так и D к E, то значит, и D, E соизмеримы только в степени (предложение 11). Но D медиаль; значит, и E медиаль (предложение 23); значит, D, E будут медиалями, соизмеримыми только в степени. Вот я утверждаю, что они и заключают медиальную ⟨площадь⟩. Действительно, поскольку как B к C, ⟨так и⟩ D к E, то значит, переста-

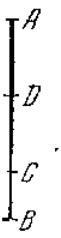
новкой (предложение 16 книги V), как B к D, ⟨так и⟩ C к E. Как же B к D, ⟨так и⟩ D к A; и значит, как D к A, ⟨так и⟩ C к E; значит, ⟨прямоугольник⟩ между A, C равен ⟨прямоугольнику⟩ между D, E (предложение 16 книги VI). ⟨Прямоугольник⟩ же между A, C медиален; значит, медиален и ⟨прямоугольник⟩ между D, E.

Итак, найдены соизмеримые только в степени медиали, заключающие медиальную ⟨площадь⟩, что и требовалось доказать.

Лемма (27)

Найти два квадратных числа так, чтобы и ⟨число⟩, составленное из них, было квадратным (черт. 32).

Отложим два числа AB, BC, пусть же они будут или чётными, или нечётными. И поскольку, когда от чётного отнимается чётное и когда от нечётного — нечётное, остаток будет чётным (предложения 24, 26 книги IX), то значит, остаток AC будет чётным. Разделим AC пополам в D. Пусть же и AB, BC будут или подобными плоскостными ⟨числами⟩, или квадратами, которые, конечно, и сами подобные плоскостные; значит, ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с квадратом на CD равно будет квадрату на BD (предложение 6 книги II). И ⟨произведение⟩ из AB, BC есть квадрат, поскольку уже доказано, что когда два подобных плоскостных ⟨числа⟩, умножая друг друга, производят что-то, то возникающее будет квадратом (предложение 1 книги IX). Значит, найдены два квадратных числа ⟨именно, произведение⟩ из AB, BC и ⟨квадрат⟩ на CD, которые сложенные производят квадрат на A.



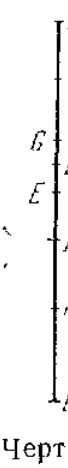
Черт. 32.

И ясно, что опять найдены два квадрата, ⟨именно⟩ на BD и на CD, так, что разность их — ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC — будет квадратом, если AB, BC будут подобные плоскостные ⟨числа⟩. Если же они не будут подобными плоскостными, то найдены два квадрата — на BD и на DC, разность которых — ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC — не будет квадратом, что и требовалось доказать.

Лемма

Найти два квадратных числа так, чтобы ⟨число⟩, составленное из них, не было квадратным (черт. 33).

Пусть ⟨произведение⟩ из AB, BC будет, как мы сказали, квадратным, и пусть CA чётное, и разделим CA пополам ⟨в⟩ D. Ясно вот, что ⟨произведение⟩ из AB, BC, ⟨являющееся⟩ квадратом, вместе с квадратом на CD равно будет квадрату на BD (см. пред. лемму). Отнимем единицу DE; значит, ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE будет меньше квадрата на BD. Теперь я утверждаю, что ⟨произведение⟩ из AB, BC, ⟨являющееся⟩ квадратом (предложение 1 книги IX), вместе с ⟨квадратом⟩ на CE не будет квадратом.



Черт. 33.

Действительно, если оно будет квадратом, то оно или равно ⟨квадрату⟩ на BE или меньше ⟨квадрата⟩ на BE, но никоим же образом не больше, для того, чтобы единица не делилась. Пусть, если возможно, сперва ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE будет равно ⟨квадрату⟩ на BE, и пусть удвоенная единица будет HA. Поскольку теперь вся AC будет вдвое больше всей CD, ⟨причём⟩ в них AH вдвое больше DE, то значит, и остаток HC будет вдвое больше остатка EC; значит, HC разделена в E пополам. Значит, ⟨произведение⟩ из HB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE равно ⟨квадрату⟩ на BE (предложение 6 книги II). Но ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE предполагается равным ⟨квадрату⟩ на BE; значит, ⟨произведение⟩ из HB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE равно ⟨произведению⟩ из AB, BC с ⟨квадратом⟩ на CE. И после отнятия общего ⟨квадрата⟩ на CE оказывается AB равным HB; это же нелепо. Значит, ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE не равно ⟨квадрату⟩ на BE. Вот я утверждаю, что оно и не меньше ⟨квадрата⟩ на BE. Действительно, если возможно, пусть оно будет равно ⟨квадрату⟩ на BI, и пусть GA будет удвоенной DI. И опять окажется, что GC вдвое больше CI; так что и CG разделилось пополам в I,

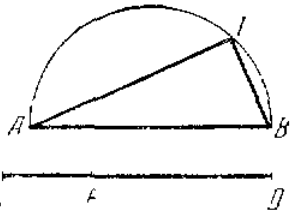
и вследствие этого ⟨произведение⟩ из GB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на IC сделается равным ⟨квадрату⟩ на BI (предложение 6 книги II). Предполагается же, что и ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE равно ⟨квадрату⟩ на BI. Так что и ⟨произведение⟩ из GB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CI равно будет ⟨произведению⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE, это же нелепо.

Значит, ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE не будет равно ⟨площади⟩, меньшей ⟨квадрата⟩ на BE. Доказано же, что оно не ⟨равно⟩ и [самому] ⟨квадрату⟩ на BE. Значит, ⟨произведение⟩ из AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CE не будет квадратом [хотя возможно и многими способами выявить вышеуказанные числа, но ограничимся вышесказанным, чтобы не растягивать ещё больше сочинение, которое и так уже велико]; это и требовалось доказать.

Предложение 29

Найти две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ так, чтобы в квадратах большая была больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с ней самой линейно (28).

Отложим некоторую рациональную ⟨прямую⟩ AB и два квадратных числа CD, DE так, чтобы их разность CE не была квадратом, и опишем на AB полукруг AIB, и сделаем, чтобы как DC к CE, так и квадрат на BA к квадрату на AI (предложение 6, следствие), и соединим IB (черт. 34).



Черт. 34.

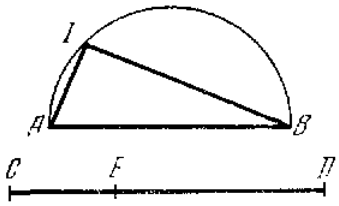
Поскольку [теперь] будет, что как ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI, так и DC к CE, то значит, ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI имеет отношение как число DC к числу CE; значит, ⟨квадрат⟩ на BA будет соизмеримым с ⟨квадратом⟩ на AI (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на AB рационален (определение 4); значит, и AI рациональна. И поскольку DC не имеет к CE отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI не имеет отно-

шения, как квадратное число к квадратному числу; значит, AB будет линейно несоизмерима с AI (предложение 9); значит, BA, AI будут рациональными, соизмеримыми только в степени. И поскольку [будет], что как DC к CE, так и ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI, то значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), как CD к DE, так и ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на BI. Но CD к DE имеет отношение как квадратное число к квадратному числу; и значит, ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на BI имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит, AB будет соизмерима с BI линейно (предложение 9). И ⟨квадрат⟩ на AB равен квадратам на AI, IB ⟨вместе⟩ (предложение 31 книги III; предложение 47 книги I); значит, в квадратах AB будет больше AI на BI — соизмеримую с собой ⟨прямую⟩.

Итак, найдены две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ BA, AI, так, что в квадратах большая AB будет больше меньшей AI на ⟨квадрат⟩ на BI, соизмеримой с ней самой линейно.

Предложение 30

Найти две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ так, чтобы в квадратах большая была больше меньшей на квадрат на несоизмеримой с ней самой линейно.



Черт. 35.

Отложим рациональную AB и два квадратных числа CE, ED, так, чтобы составленное из них CD не было бы квадратом, и опишем на AB полукруг AIB, и сделаем, чтобы как DC к CE, так и ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI (предложение 6, следствие), и соединим IB (черт. 35).

Подобно же вот предыдущему докажем, что BA, AI будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩. И поскольку как DC к CE, так и ⟨квадрат⟩ на BA к ⟨квадрату⟩ на AI, то значит, «переворачивая»

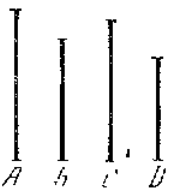
(предложение 19 книги V, следствие), как CD к DE, так и ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на BI (предложение 31 книги III; предложение 47 книги I). Но CD к DE не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на BI не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, AB будет несоизмеримо с BI линейно (предложение 9). И в квадратах AB больше AI на ⟨квадрат⟩ на IB, с ней самой несоизмеримой (предложение 31 книги III; предложение 47 книги I).

Итак, AB, AI суть рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩, и в квадратах AB больше AI на ⟨квадрат⟩ на IB, несоизмеримой с ней самой линейно, что и требовалось доказать.

Предложение 31

Найти две медиали, соизмеримые только в степени, заключающие рациональную ⟨площадь⟩ так, чтобы в квадратах большая была больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с ней самой линейно (29) (черт. 36).

Отложим две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ A, B так, чтобы A, будучи большей, была в квадратах более меньшей B на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с ней самой линейно (предложение 29). И пусть ⟨прямоугольнику⟩ между A, B будет равен ⟨квадрат⟩ на C. ⟨Прямоугольник⟩ же между A, B медиален; значит, и ⟨квадрат⟩ на C медиален (предложение 21); значит, и C медиаль. Пусть же ⟨квадрату⟩ на B будет равен ⟨прямоугольник⟩ между C, D; ⟨квадрат⟩ же на B рационален; рационален, значит, и ⟨прямоугольник⟩ между C, D. И поскольку будет, что как A к B, так и ⟨прямоугольник⟩ между A, B к ⟨квадрату⟩ на B (предложение 21, лемма), но ⟨прямоугольнику⟩ между A, B равен ⟨квадрат⟩ на C, ⟨квадрату⟩ же на B равен ⟨прямоугольник⟩ между C, D, то значит, как A к B, так и ⟨квадрат⟩ на C к ⟨прямоугольнику⟩ между C, D. Как же ⟨квадрат⟩ на C к ⟨пря-



Черт. 36.

моугольнику> между C, D, так и C к D (предложение 21, лемма); и значит, как A к B, так и C к D. Но A соизмерима с B только в степени; значит, и C соизмерима с D только в степени (предложение 11). И C есть медиаль; значит, и D медиаль (предложение 23). И поскольку как A к B, <так и> C к D, в квадратах же A больше B на <квадрат> на соизмеримой с ней самой, то значит, и C в квадратах больше D на <квадрат> на соизмеримой с ней самой.

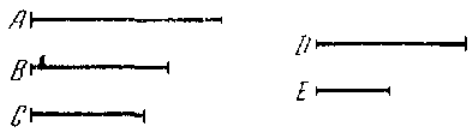
Итак, найдены две медиали C, D, соизмеримые только в степени, заключающие рациональную <площадь>, и в квадратах C больше D на <квадрат> на соизмеримой с ней самой линейно.

Подобным же вот образом докажется и <что в квадратах C больше D> на <квадрат> на несоизмеримой, когда в квадратах A больше B на <квадрат> на несоизмеримой с ней самой (предложение 30).

Предложение 32

Найти две медиали, соизмеримые только в степени, заключающие медиальную площадь так, чтобы в квадратах большая была больше меньшей на <квадрат> с ней самой соизмеримой (30) (черт. 37).

Отложим три рациональные <прямые> A, B, C, соизмеримые только в степени, так, чтобы в квадратах A была больше C на <квадрат> с ней самой соизмеримой (предложение 29), и пусть <прямоугольнику> между A, B будет равен <квадрат> на D. Значит, <квадрат> на D медиален; значит, и D будет медиалью (предложение 21). Пусть же <прямоугольнику> между B, C будет равен <прямоугольник> между D, E. И поскольку будет, что как <прямоугольник> между A, B к <прямоугольнику> между B, C, так и A к C (предложение 21, лемма), но <прямоугольнику> между A, B равен <квадрат> на D, <прямоугольнику> же между B, C равен <прямоугольник> между D, E,



Черт. 37.

то значит, будет, что как A к C, так и ⟨квадрат⟩ на D к ⟨прямоугольнику⟩ между D, E. Как же ⟨квадрат⟩ на D к ⟨прямоугольнику⟩ между D, E, так и D к E; (предложение 21, лемма); и значит, как A к C, так и D к E. Но A соизмерима с C [только] в степени. Значит, и D соизмерима с E только в степени (предложение 11). Но D — медиаль; значит, и E медиаль (предложение 23). И поскольку будет, что как A к C, ⟨так и⟩ D к E, в квадратах же A больше C на ⟨квадрат⟩ с ней самой соизмеримой, то значит, и D будет в квадратах больше E на ⟨квадрат⟩ с ней самой соизмеримой (предложение 24). Вот я утверждаю, что ⟨прямоугольник⟩ между D, E будет медиальным. Действительно, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между B, C равен ⟨прямоугольнику⟩ между D, E, ⟨прямоугольник⟩ же между B, C медиален [ибо B, C суть рациональные, соизмеримые только в степени] (предложение 21), то и ⟨прямоугольник⟩ между D, E медиален.

Итак, найдены две медиали D, E, соизмеримые только в степени, заключающие медиальную ⟨площадь⟩, так, что в квадратах большая больше меньшей на ⟨квадрат⟩ с ней самой соизмеримой.

Подобным же вот образом докажется опять, ⟨что в квадратах D больше E⟩ на ⟨квадрат⟩ несоизмеримой, когда A в квадратах больше C на ⟨квадрат⟩ с ней самой несоизмеримой (предложение 30).

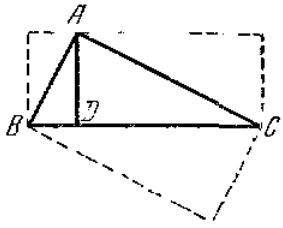
Лемма (31)

Пусть будет прямоугольный треугольник ABC, имеющий ⟨угол⟩ A прямой, и проведём перпендикуляр AD; я утверждаю, что ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD будет равен ⟨квадрату⟩ на BA, ⟨прямоугольник⟩ же между BC, CD равен ⟨квадрату⟩ на CA, и ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC равен ⟨квадрату⟩ на AD, и ещё ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD равен [будет] ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC (черт. 38).

И сперва, что ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD равен [будет] ⟨квадрату⟩ на BA.

Действительно, поскольку в прямоугольном треугольнике из прямого угла к основанию проведен перпендикуляр AD, то значит, ABD, ADC будут треугольники, подобные и всему ABC и между собой (предложение 8 книги VI).

И поскольку треугольник ABC подобен треугольнику ABD, то значит, будет, что как CB к BA, так и BA к BD (предложение 4 книги VI); значит, ⟨прямоугольник⟩ между CB, BD будет равен ⟨квадрату⟩ на AB (предложение 17 книги VI).



Черт. 38.

Вследствие того же вот и ⟨прямоугольник⟩ между BC, CD будет равен ⟨квадрату⟩ на AC.

И поскольку, когда в прямоугольном треугольнике из прямого угла проведён перпендикуляр, проведённая ⟨прямая⟩ будет средней пропорциональной между отрезками основания (предложение 8, следствие книги VI), то значит, будет, что как BD к DA, так и AD к DC; значит, ⟨прямоугольник⟩ между BD, DC будет равен ⟨квадрату⟩ на DA (предложение 17 книги VI).

Я утверждаю, что и ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD будет равен ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC. Действительно, поскольку, как мы сказали, ABC будет подобен ABD, то значит, будет (предложение 4 книги VI), что как BC к CA, так и BA к AD [если же четыре прямые пропорциональны, то ⟨прямоугольник⟩ между крайними равен ⟨прямоугольнику⟩ между средними]. Значит, ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD равен ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC (предложение 16 книги VI), что и требовалось доказать.

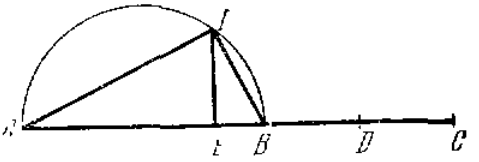
Предложение 33

Найти две несоизмеримые в степени прямые, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ рациональную, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальный.

Отложим две рациональные ⟨прямые⟩ AB, BC, соизмеримые только в степени, так, чтобы в квадратах большая

AB была больше меньшей BC на ⟨квадрат⟩ с ней самой несоизмеримой (предложение 30), и рассечём BC пополам в D, и приложим к AB равный ⟨квадрату⟩ на каждой из BD, DC параллелограмм с недостатком в виде квадрата (предложение 28 книги VI), и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB, и опишем на AB полукруг AIB, и проведём EI под прямыми ⟨углами⟩ к AB, и соединим AI, IB (черт. 39).

И поскольку будут [две] неравные прямые AB, BC, и в квадратах AB более BC на ⟨квадрат⟩ с ней самой несоизмеримой, и к AB приложен равный четверти ⟨квадрата⟩



Черт. 39.

на BC, то-есть ⟨квадрату⟩ на её половине, параллелограмм с недостатком в виде квадрата, и он образует ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB, то значит, AE будет несоизмеримой с EB (предложение 18). И как AE к EB, так и ⟨прямоугольник⟩ между BA, AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BE, ⟨прямоугольник⟩ же между BA, AE равен ⟨квадрату⟩ на AI, ⟨прямоугольник⟩ же между AB, BE ⟨квадрату⟩ на BI; значит, ⟨квадрат⟩ на AI будет несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на IB; значит, AI, IB будут несоизмеримы в степени (предложение 11). И поскольку AB рациональна, то значит, будет рациональным и ⟨квадрат⟩ на AB; так что и составленная из ⟨квадратов⟩ на AI, IB ⟨площадь⟩ будет рациональна (предложение 47 книги I). И затем, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB равен ⟨квадрату⟩ на EI, предполагается же ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB равным и ⟨квадрату⟩ на BD, то значит, IE равна будет BD; значит, BC вдвое больше IE; так что и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC будет соизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, EI (предложение 6). ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, BC медиален (предложение 21); значит, и

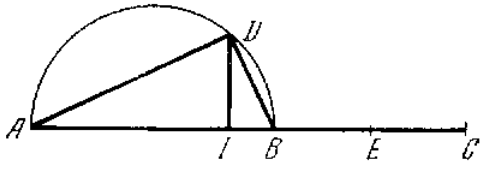
⟨прямоугольник⟩ между AB, EI медиален (предложение 23, следствие). ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, EI равен ⟨прямоугольнику⟩ между AI, IB (лемма); значит, медиален и ⟨прямоугольник⟩ между AI, IB. Доказано же, что составленная из квадратов на них ⟨площадь будет⟩ и рациональной.

Итак, найдены две несоизмеримые в степени прямые AI, IB, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ рациональную, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальный, что и требовалось доказать (32).

Предложение 34

Найти две прямые, несоизмеримые в степени, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ медиальную, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный (33).

Отложим две медиали AB, BC, соизмеримые только в степени, заключающие между собой рациональный ⟨прямоугольник⟩, так, чтобы в квадратах AB была больше BC на ⟨квадрат⟩ с ней самой несоизмеримой (предложение 31), и опишем на AB полукруг ADB, и рассечём BC пополам в E, и приложим к AB равный ⟨квадрату⟩ на BE параллелограмм с недостатком в виде квадрата (предложение 28 книги VI), именно ⟨параллелограмм⟩ между AI, IB; значит, AI [будет] несоизмерима с IB линейно (предложение 18). И проведём из I под прямыми ⟨углами⟩ к AB ⟨прямую⟩ ID, и соединим AD, DB (черт. 40).



Черт. 40.

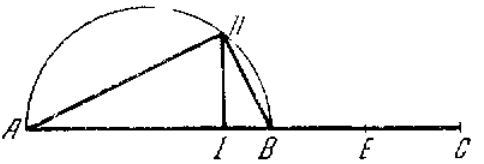
Поскольку AI несоизмерима с IB, то значит, и ⟨прямоугольник⟩ между BA, AI будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BI (предложение 11). ⟨Прямоугольник⟩ же между BA, AI равен ⟨квадрату⟩ на AD, ⟨прямоугольник⟩ же

между AB, BI — ⟨квадрату⟩ на DB (предложение 32, лемма); значит, и ⟨квадрат⟩ на AD будет несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на DB. И поскольку квадрат на AB медиален, то значит, медиальна и составленная из ⟨квадратов⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ (предложение 31 книги III; предложение 47 книги I). И поскольку BC вдвое больше DI, то и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC вдвое больше ⟨прямоугольника⟩ между AB, ID. ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, BC рационален; значит, рационален и ⟨прямоугольник⟩ между AB, ID (предложение 6). ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, ID равен ⟨прямоугольнику⟩ между AD, DB (предложение 32, лемма); так что и ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB будет рационален.

Итак, найдены две прямые AD, DB, несоизмеримые в степени, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ медиальную, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный, что и требовалось доказать.

Предложение 35

Найти две прямые, несоизмеримые в степени, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ медиальную и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный и ещё несоизмеримый с составленной из квадратов на них ⟨площадью⟩ (31).



Черт. 41.

Отложим две медиали AB, BC, соизмеримые только в степени, заключающие медиальную ⟨площадь⟩, так, чтобы в квадратах AB была больше BC на ⟨квадрат⟩ с ней самой несоизмеримой (предложение 32), и опишем на AB полукруг ADB, и сделаем всё остальное подобно тому как выше (черт. 41).

И поскольку AI несоизмерима с IB линейно, и AD будет несоизмерима с DB в степени (предложение 11). И поскольку ⟨квадрат⟩ на AB медиален, то значит, медиальной будет и составленная из ⟨квадратов⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ (предложение 23, следствие). И поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AI, IB равен квадрату на каждой из BE, DI, то значит, BE будет равна DI; значит, BC вдвое больше ID, так что и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC будет вдвое больше ⟨прямоугольника⟩ между AB, ID. ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, BC медиален; значит, медиален и ⟨прямоугольник⟩ между AB, ID. И он равен ⟨прямоугольнику⟩ между AD, DB (предложение 32, лемма); значит, и ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB медиален. И поскольку AB несоизмерима с BC линейно, CB же соизмерима с BE, то значит, и AB несоизмерима с BE линейно (предложение 13); так что и ⟨квадрат⟩ на AB будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BE (предложение 21, лемма; предложение 11). Но ⟨квадрату⟩ на AB равны ⟨квадраты⟩ на AD, DB (предложение 47 книги I), ⟨прямоугольнику⟩ же между AB, BE равен ⟨прямоугольник⟩ между AB, ID, то-есть ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB; значит, составленная из ⟨квадратов⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ будет несоизмерима с ⟨прямоугольником⟩ между AD, DB.

Итак, найдены две прямые AD, DB, несоизмеримые в степени, образующие составленную из квадратов на них ⟨площадь⟩ медиальную, и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, и ещё несоизмеримый с составленной из квадратов на них площадью, что и требовалось доказать.

Предложение 36

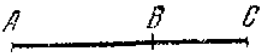
Если составляются две рациональные, соизмеримые только в степени прямые, то целая будет иррациональной; пусть она называется *биномиалью* *) (35).

Пусть составляются две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ AB, BC; я утверждаю, что целая AC будет иррациональной (черт. 42).

---

*) ἐκ δύο ὀνομάτων — из двух имён; в латинском переложении ex duobus nominibus; правильнее было бы название биноминаль.

Действительно, поскольку AB несоизмерима с BC линейно (ибо они соизмеримы только в степени), как же AB к BC, так и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC к ⟨квадрату⟩ на BC (предложение 21, лемма), то значит, прямоугольник между AB, BC будет несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на BC (предложение 11). Но с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC соизмерим дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между



Черт. 42.

AB, BC (предложение 6), с ⟨квадратом⟩ же на BC соизмеримы ⟨квадраты⟩ на AB, BC ⟨вместе⟩; ибо AB, BC суть рациональные ⟨прямые⟩, соизмеримые только в степени (предложение 15); значит, дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC несоизмерим с ⟨квадратами⟩ на AB, BC (предложение 13). И, «присоединяя», дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC вместе с ⟨квадратами⟩ на AB, BC, то-есть квадрат на AC (предложение 4 книги II), несоизмерим будет с составленным из ⟨квадратов⟩ на AB, BC (предложение 16). Составленное же из ⟨квадратов⟩ на AB, BC рационально; значит, ⟨квадрат⟩ на AC [будет] иррациональным (определение 4); так что и AC будет иррациональной; пусть она называется *биномиалью*, что и требовалось доказать.

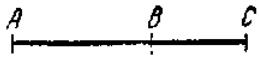
Предложение 37

Если составляются две соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную ⟨площадь⟩, то целая будет иррациональной; пусть она называется *первой бимедиалью* *).

Пусть составляются две соизмеримые только в степени медиали AB, BC, заключающие рациональную ⟨площадь⟩ (предложение 27); я утверждаю, что целая AC будет иррациональной (черт. 43).

*) ἐκ δύο μέσων πρώτη — из двух медиалей первая.

Действительно, поскольку AB несоизмерима с BC линейно, то значит, и ⟨квадраты⟩ на AB, BC будут несоизмеримы с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC; и, «присоединяя» ⟨квадраты⟩ на AB, BC вместе с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (а это будет

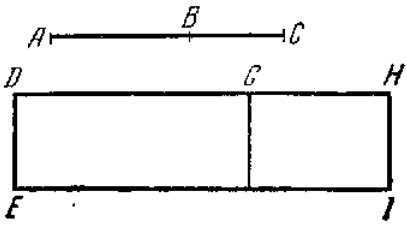


Черт. 43.

⟨квадрат⟩ на AC) (предложение 4 книги II), несоизмеримы с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 16). ⟨Прямоугольник⟩ же между AB, BC рационален, ибо AB, BC предполагаются заключающими рациональную ⟨площадь⟩; значит, иррационален ⟨квадрат⟩ на AC; значит, иррациональна AC (определение 4); пусть она называется *первой бимедиалью;* что и требовалось доказать.

Предложение 38

Если составляются две соизмеримые только в степени медиали, заключающие медиальную площадь, то целая будет иррациональной; пусть она называется *второй бимедиалью* *).



Черт. 44.

Пусть составляются две соизмеримые только в степени медиали AB, BC, заключающие медиальную ⟨площадь⟩ (предложение 28); я утверждаю, что AC будет иррациональной (черт. 44).

Действительно, отложим рациональную ⟨прямую⟩ DE и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AC ⟨параллелограмм⟩ DI, производящий ширину DH (предложение 44

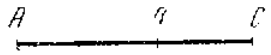
*) ἐκ δύο μέσων δευτέρα — из двух медиалей вторая.

книги I). И поскольку ⟨квадрат⟩ на AC равен ⟨квадратам⟩ на AB, BC и дважды взятому ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC ⟨вместе⟩ (предложение 4 книги II), то вот приложим к DE равный ⟨квадратам⟩ на AB, BC ⟨параллелограмм⟩ EG; значит, остаток GI будет равен дважды взятому ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC. И поскольку каждая из AB, BC медиаль, то значит, будут медиальными и ⟨квадраты⟩ на AB, BC. Медиальным же по предположению будет и дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC. И ⟨квадратам⟩ на AB, BC равен EG, дважды же взятому ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC равен GI; значит, каждый из EG, GI будет медиальным. И прилагаются они к рациональной DE; значит, каждая из DG, GH будет рациональной и несоизмеримой с DE линейно (предложение 22). Поскольку теперь AB несоизмерима с BC линейно, и будет, что как AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC (предложение 21, лемма), то значит, ⟨квадрат⟩ на AB несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AB соизмерима составленная из квадратов на AB, BC ⟨площадь⟩ (предложение 15), с ⟨прямоугольником⟩ же между AB, BC соизмерим дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC (предложение 6). Значит, составленная из ⟨квадратов⟩ на AB, BC ⟨площадь⟩ будет несоизмерима с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 13). Но ⟨квадратам⟩ на AB, BC равен EG, дважды же взятому ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC равен GI. Значит, EG будет несоизмерим с GI; так что и DG будет несоизмерима с GH линейно (предложение 11; предложение 1 книги VI). Значит, DG, GH будут рациональными соизмеримыми только в степени. Так что DH иррациональна (предложение 36). Но DE рациональна; прямоугольник же, заключённый между иррациональной и рациональной, будет иррациональным (предложение 20); значит, иррациональной будет площадь DI, и квадрирующая [её] будет иррациональной (определение 4). Но DI квадрируется ⟨прямой⟩ AC; значит, AC будет иррациональна, пусть она называется *второй бимедиалью*, что и требовалось доказать.

Предложение 39

Если составляются две прямые, несоизмеримые в степени, делающие составленное из квадратов на них рациональным, прямоугольник же между ними медиальным, то целая прямая будет иррациональна; пусть она называется *большей*.

Пусть составляются две прямые AB, BC, несоизмеримые в степени, выполняя предложенное (предложение 33); я утверждаю, что AC будет иррациональной (черт. 45).



Черт. 45.

Действительно, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC медиален, то [значит] и дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC будет медиальным (предложения 6, 23, следствие). Составленное же из ⟨квадратов⟩ на AB, BC рационально; значит, дважды взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC несоизмерим с составленным из ⟨квадратов⟩ на AB, BC (определение 4); так что и ⟨квадраты⟩ на AB, BC вместе с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC — это же будет ⟨квадрат⟩ на AC (предложение 4 книги II) — будут несоизмеримы с составленным из ⟨квадратов⟩ на AB, BC (предложение 16) [составленное же из ⟨квадратов⟩ на AB, BC рационально]; значит, ⟨квадрат⟩ на AC иррационален. Так что и AC будет иррациональной (определение 4); пусть она называется *большей*; что и требовалось доказать.

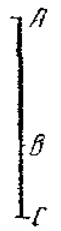
Предложение 40

Если составляются две прямые, несоизмеримые в степени, делающие сумму квадратов на них медиальной, прямоугольник же между ними рациональным, то целая прямая будет иррациональной; пусть она называется *рационально и медиально квадрирующей* *).

*) ῥητὸν καὶ μέσον δυναμένη.

Пусть составляются две прямые AB, BC, несоизмеримые в степени, выполняя предложенное (предложение 34); я утверждаю, что AC будет иррациональной (черт. 46).

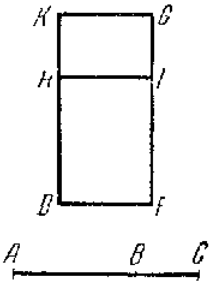
Действительно, поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на AB, BC медиально, дважды же взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рационален, то значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на AB, BC будет несоизмеримо с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC; так что и ⟨квадрат⟩ на AC несоизмерим с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 16). Дважды же взятый ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рационален; значит, ⟨квадрат⟩ на AC иррационален. Значит, AC будет иррациональна (определение 4); пусть она называется *рационально и медиально квадрирующей;* что и требовалось доказать.



Черт. 46.

Предложение 41

Если составляются две прямые, несоизмеримые в степени, делающие сумму квадратов на них медиальной и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальным и, кроме того, несоизмеримым с суммой квадратов на них, то целая прямая будет иррациональной; пусть она называется *бимедиально квадрирующей.*



Черт. 47.

Пусть составляются две прямые AB, BC, несоизмеримые в степени, выполняя предложенное (предложение 35); я утверждаю, что AC будет иррациональной (черт. 47).

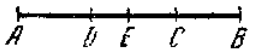
Отложим рациональную DE и приложим к DE ⟨параллелограмм⟩ DI, равный ⟨квадратам⟩ на AB, BC, и ⟨параллелограмм⟩ HG, равный удвоенному ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC; значит, весь DG будет равен квадрату на AC (предложение 4 книги II). И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на AB, BC медиально и равно DI, то значит, и DI будет медиальным. И оно прилагается к рациональной DE; значит, DH будет рациональной и несоизмеримой с DE линейно (предложение 22). На том же

вот основании и HK будет рациональной и несоизмеримой линейно с HI, то-есть с DE. И поскольку несоизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC с дважды взятым ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC, то DI будет несоизмерим с HG; так что и DH несоизмерима с HK (предложение 11; предложение 1 книги VI). И они рациональны; значит, DH, HK будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, DK будет иррациональной, так называемой биномиалью (предложение 36). Но DE рациональна; значит, DG будет иррациональным, и его квадрирующая будет иррациональной (определение 4). Квадрируется же DG ⟨прямой⟩ AC; значит, AC будет иррациональной; пусть она называется *бимедиально квадрирующей*; что и требовалось доказать.

Лемма

А что упомянутые иррациональности единственным образом разделяются на прямые, из которых ⟨как⟩ производящих складываются предложенные виды, докажем, предпослав такую леммочку:

Отложим прямую AB и рассечём всю её на неравные ⟨части⟩ в каждой из ⟨точек⟩ C, D, предположим AC большей, чем DB; я утверждаю, что ⟨квадраты⟩ на AC, CB больше ⟨квадратов⟩ на AD, DB (черт. 48).



Черт. 48.

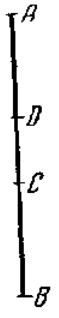
Действительно, рассечём AB пополам в E. И поскольку AC больше DB, то отнимем общую ⟨часть⟩ DC; значит, остаток AD будет больше остатка CB. Но AE равно EB; значит, DE меньше EC; значит, точки C, D не одинаково удалены от делящей пополам. И поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB вместе с ⟨квадратом⟩ на EC равен ⟨квадрату⟩ на EB, но вместе с тем и ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB с ⟨квадратом⟩ на DE равен ⟨квадрату⟩ на EB (предложение 5 книги II), то значит, ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB вместе с ⟨квадратом⟩ на EC равен ⟨прямоугольнику⟩ между AD, DB вместе с ⟨квадратом⟩

на DE; из них ⟨квадрат⟩ на DE меньше ⟨квадрата⟩ на EC; и значит, остающийся ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB будет меньше ⟨прямоугольника⟩ между AD, DB. Так что и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB будет меньше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AD, DB. И значит, остаток, составленный из ⟨квадратов⟩ на AC, CB, будет больше составленного из ⟨квадратов⟩ на AD, DB, что и требовалось доказать (36, 37).

Предложение 42

Биномиаль разделяется на рационали) только в одной точке* (38).

Пусть будет биномиаль AB, разделённая на рационали в C; значит, AC, CB будут рациональные ⟨прямые⟩, соизмеримые только в степени (предложение 36). Я утверждаю, что AB в иной точке не разделяется на две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ (черт. 49).



Черт. 49.

Действительно, если возможно, то пусть она будет разделена и в D так, что и AD, DB будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩. Ясно вот, что AC не будет тождественной с DB. Действительно, если возможно, пусть будет. Тогда и AD будет тождественной с CB; и будет, что как AC к CB, так и BD к DA, и будет AB и в D рассечённой тем же самым сечением, что в C; этого же не предполагается. Значит, AC не будет тождественной с DB. Тогда вследствие этого и точки C, D не одинаково удалены от делящей пополам (лемма). Значит, чем ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB разнятся от ⟨вместе взятых квадратов⟩ на AD, DB, тем и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB разнится от дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB, вследствие того, что и ⟨квадраты⟩ на AC, CB вместе с дважды ⟨прямо

*) τὰ ὀνόματα — буквально «имена». Поскольку «имеющий имя» по греческой терминологии тождественно с «рациональным», то здесь и в дальнейшем мы будем переводить этот термин словом «рациональ».

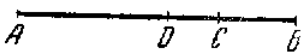
угольником〉 между AC, CB, и 〈квадраты〉 на AD, DB вместе с дважды 〈прямоугольником〉 между AD, DB равны будут 〈квадрату〉 на AB (предложение 4 книги II). Но 〈квадраты〉 на AC, CB разнятся от 〈квадратов〉 на AD, DB на рациональную 〈величину〉, ибо и те и другие рациональны; значит, и дважды 〈прямоугольник〉 между AD, DB на рациональную 〈величину〉 разнится от дважды 〈прямоугольника〉 между AC, CB, будучи 〈оба〉 медиальными (предложение 21); это же нелепо, ибо медиаль не превосходит медиали на рациональную 〈величину〉 (предложение 26).

Итак, биномиаль в одной и другой точке не разделяется; значит, только в одной, что и требовалось доказать.

Предложение 43

Первая бимедиаль разделяется только в одной точке.

Пусть будет первая бимедиаль AB, разделённая в C так, что AC, CB будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими рациональную 〈площадь〉; я утверждаю, что AB в иной точке 〈так〉 не разделяется (черт. 50).



Черт. 50.

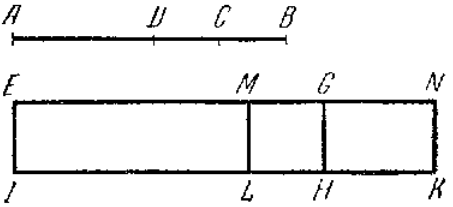
Действительно, пусть, если возможно, она будет разделяться и в D так, что и AD, DB будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими рациональную 〈площадь〉. Поскольку теперь, чем дважды 〈прямоугольник〉 между AD, DB разнится от дважды 〈прямоугольника〉 между AC, CB, тем и 〈вместе взятые квадраты〉 на AC, CB разнятся от 〈вместе взятых квадратов〉 на AD, DB; но дважды 〈прямоугольник〉 между AD, DB разнится рациональным от дважды 〈прямоугольника〉 между AC, CB, ибо оба рациональны; значит, и 〈квадраты〉 на AC, CB рациональным разнятся от 〈квадратов〉 на AD, DB, будучи 〈сами〉 медиальными; это же нелепо (предложение 26).

Итак, первая бимедиаль не делится в одной и другой точке на рационали; значит, только в одной, что и требовалось доказать.

Предложение 44

Вторая бимедиаль разделяется только в одной точке.

Пусть будет вторая бимедиаль AB, разделённая в C так, что AC, CB будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими медиальную ⟨площадь⟩ (предложение 38); ясно вот, что C не будет делящей пополам, потому что ⟨отрезки⟩ не будут линейно соизмеримыми. Я утверждаю, что AB в иной точке ⟨так⟩ не разделяется (черт. 51).



Черт. 51.

Действительно, пусть, если возможно, она будет разделяться и в D так, что AC не будет тождественной с DB, но ⟨пусть будет⟩ AC по предположению большей; ясно вот, что и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB, как мы доказали выше (предложение 41, лемма), меньше ⟨вместе взятых квадратов⟩ на AC, CB; и AD, DB будут соизмеримыми только в степени медиалями, заключающими медиальную ⟨площадь⟩. И отложим рациональную EI, и приложим к EI равный ⟨квадрату⟩ на AB прямоугольный параллелограмм EK, отнимем же EH, равный ⟨квадратам⟩ на AC, CB; значит, остаток GK будет равен дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB (предложение 4 книги II). Затем, отнимем EL, равный ⟨квадратам⟩ на AD, DB, которые по доказанному меньше ⟨квадратов⟩ на AC, CB; значит, и остаток MK равен дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AD, DB. И поскольку ⟨квадраты⟩ на AC, CB медиальны, то значит, медиален [и] EH. И он прилагается к рациональной EI; значит, EG будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно (предложение 22). Вследствие того же вот и GN будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно (предложение 22). И поскольку AC, CB медиали, соизмеримые только в степени, то значит, и AC будет несоизмерима с CB линейно. Как же AC к CB, так и ⟨квадрат⟩ на AC к ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB (предложение 21, лемма); значит, ⟨квадрат⟩ на AC несо-

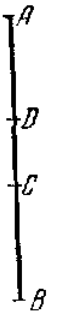
измерим будет с ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AC соизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB; ибо AC, CB соизмеримы в степени. С ⟨прямоугольником⟩ же между AC, CB соизмерим дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB (предложение 6). И значит, ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB (предложение 13). Но ⟨квадратам⟩ на AC, CB равен будет EH, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB равен GK; значит, EH будет несоизмеримым с GK; так что и EG будет линейно несоизмерима с GN (предложение 1 книги VI, предложение 11 книги X). И они рациональны; значит, EG, GN будут рациональные ⟨прямые⟩, соизмеримые только в степени. Если же составляются две рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩, то целая будет иррациональной так называемой биномиалью (предложение 36); значит, EN будет биномиалью, разделённой в G. Тем же вот самым образом докажется, что и EM, MN ⟨являются⟩ рациональными, соизмеримыми только в степени; и EN будет биномиалью, разделённой в одной и другой точках — G и M, и не будет EG тождественной с MN, потому что ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут больше ⟨квадратов⟩ на AD, DB. Но ⟨квадраты⟩ на AD, DB больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AD, DB; значит, тем более и ⟨квадраты⟩ на AC, CB, то-есть EH, будут больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AD, DB, то-есть MK; так что и EG будет больше MN (предложение 1 книги VI). Значит, EG не будет тождественной с MN, что и требовалось доказать.

Предложение 45

«Бóльшая» ⟨иррациональная⟩ разделяется только в одной и той же точке.

Пусть будет «бóльшая» иррациональная AB, разделённая в C так, что AC, CB будут несоизмеримыми в степени, делающими составленное из квадратов на AC, CB рациональным, ⟨прямоугольник⟩ же между AC, CB медиальным (предложение 39); я утверждаю, что AB в иной точке ⟨так⟩ не разделяется (черт. 52).

Действительно, пусть, если возможно, она будет разделяться и в D так, что AD, DB будут несоизмеримыми в степени, делающими составленное из ⟨квадратов⟩ на AD, DB рациональным, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальным. И поскольку чем разнятся ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB от ⟨квадратов⟩ на AD, DB, тем разнятся и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB от дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB (предложение 41, лемма), но ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB рациональным превосходят ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB, ибо оба рациональны; значит, и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным превосходит дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, будучи ⟨оба⟩ медиальными; это же невозможно (предложение 26). Значит, «бо́льшая» не разделяется в одной и другой точке; значит, она разделяется только в одной и той же, что и требовалось доказать.



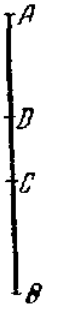
Черт. 52.

Предложение 46

Рационально и медиально квадрирующая разделяется только в одной точке.

Пусть будет рационально и медиально квадрирующая AB, разделённая в C так, что AC, CB будут несоизмеримыми в степени, делающими составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB медиальным, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB рациональным (предложение 40); я утверждаю, что AB в иной точке ⟨так⟩ не разделяется (черт. 53).

Действительно, пусть, если возможно, она будет разделяться и в D так, что AD, DB будут несоизмеримыми в степени, делающими составленное из ⟨квадратов⟩ на AD, DB медиальным, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным. Поскольку теперь чем разнятся дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB от дважды ⟨прямоугольника⟩ между AD, DB, тем разнятся и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB от ⟨квадратов⟩ на AC, CB, дважды



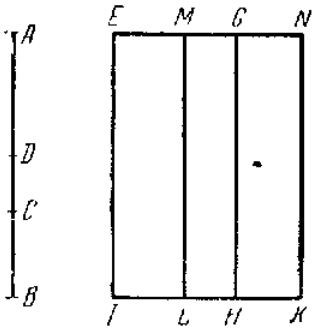
Черт. 53.

же ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB рациональным превосходит дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB, значит, и ⟨квадраты⟩ на AD, DB рациональным превосходят ⟨квадраты⟩ на AC, CB, будучи медиальными; это же невозможно (предложение 26). Значит, рационально и медиально квадрирующая не разделяется в одной и другой точке. Значит, она разделяется в одной точке, что и требовалось доказать.

Предложение 47

Бимедиально квадрирующая разделяется только в одной точке.

Пусть будет [бимедиально квадрирующая] AB, разделённая в C, так что AC, CB будут несоизмеримыми в степени, делающими составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB медиальным и ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB медиальным и ещё несоизмеримым с составленным из ⟨квадратов⟩ на них (предложение 41). Я утверждаю, что AB не разделяется в иной точке, выполняя предложенное (черт. 54).



Черт. 54

Действительно, пусть, если возможно, она будет разделяться и в D, так что, конечно, опять AC не будет тождественной с DB, но ⟨пусть будет⟩ AC по предположению большей, и отложим рациональную ⟨прямую⟩ EI, и приложим к EI равную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AC, CB ⟨площадь⟩ EH, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB ⟨равную площадь⟩ GK; значит, весь EK будет равным квадрату на AB (предложение 4 книги II). Вот затем приложим к EI равную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ EL; значит, остающийся дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB будет равен остающейся ⟨площади⟩ MK. И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB предполагается медиальным, то значит, медиальным будет и EH. И он прилагается к рациональной EI; значит,

GE будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно (предложение 22). На основании того же вот и GN будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно. И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB несоизмеримо с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB, то значит, и EH будет несоизмерим с HN; так что и EG будет несоизмерима с GN (предложение 11; предложение 1 книги VI). И они рациональны; значит, EG, GN будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, EN будет биномиалью, разделённой в G (предложение 36). Подобным же вот образом докажем, что она разделится и в M. И не будет EG тождественной с MN; значит, биномиаль разделилась в одной и другой точке; это же невозможно (предложение 42). Значит, бимедиально квадрирующая не разделяется в одной и другой точке; значит, она разделяется в одной только [точке].

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВТОРЫЕ

1. Если предложена рациональная ⟨прямая⟩ и биномиаль разделена на две рационали, из которых бо́льшая рациональ будет в квадратах более меньшей на ⟨квадрат⟩ на линейно с собой соизмеримой ⟨прямой⟩, то, когда большая рациональ соизмерима будет линейно с отложенной рациональной, пусть [вся] ⟨биномиаль⟩ называется *первой биномиалью*.

2. Когда же меньшая рациональ будет соизмерима линейно с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, то пусть называется *второй биномиалью*.

3. Если же ни одна из рационалей не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, то пусть называется *третьей биномиалью*.

4. Затем, когда бо́льшая рациональ будет в квадратах больше [меньшей] на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно ⟨прямой⟩, то когда большая рациональ будет соизмерима линейно с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, пусть называется *четвёртой биномиалью*.

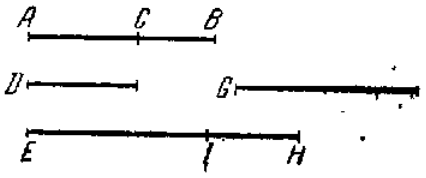
5. Когда же меньшая ⟨рациональ соизмерима⟩, то — *пятой*.

6. Когда же ни та, ни другая, то — *шестой* (38, 39, 40, 41, 42).

Предложение 48

Найти первую биномиаль (46) (черт. 55).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы составленное из них AB имело к BC отношение, как квадратное число к квадратному числу (лемма предложения 28), к CA же не имело бы отношения, как квадратное число к квадратному



Черт. 55.

числу, и отложим какую-нибудь рациональную ⟨прямую⟩ D, и пусть EI будет линейно соизмерима с D. Значит, и EI будет рациональной (определение 3). И сделаем, чтобы как число BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие). Но AB имеет к AC отношение, как число к числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношение, как число к числу; так что ⟨квадрат⟩ на EI соизмерим будет с ⟨квадратом⟩ на IH (предложение 6). И EI рациональна; значит, рациональна и IH. И поскольку BA не имеет к AC отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на EI не имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, EI будет линейно несоизмерима с IH (предложение 9). Значит, EI, IH будут рациональными соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, EH будет биномиалью (предложение 36).

Я утверждаю, что и *первой*.

Действительно, поскольку будет, что как число BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH, и BA больше AC, то значит, и ⟨квадрат⟩ на EI больше ⟨квадрата⟩ на IH (предложение 14 книги V). Пусть теперь ⟨квадрату⟩ на EI равны будут ⟨вместе взятые квадраты⟩ на IH, G. И поскольку будет, что как BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH, то значит, «перево-

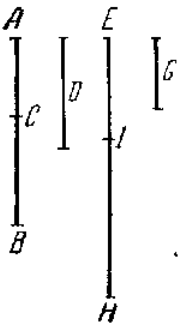
рачивая» (предложение 19 книги V), будет, что как AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на G. Но AB имеет к BC отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI имеет к ⟨квадрату⟩ на G отношение, как квадратное число к квадратному числу. Значит, EI будет линейно соизмерима с G (предложение 9); значит, в квадратах EI больше IH на ⟨квадрат⟩ с собой соизмеримой ⟨прямой⟩. И EI, IH будут рациональны, и EI соизмерима с D линейно.

Значит, EH будет первой биномиалью (определения вторые, 1), что и требовалось доказать.

Предложение 49

Найти вторую биномиаль (черт. 56).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы составленное из них AB имело к BC отношение, как квадратное число к квадратному числу, к AC же не имело бы отношения, как квадратное число к квадратному числу (лемма предложения 28), и отложим рациональную ⟨прямую⟩ D, и пусть EI будет с D линейно соизмерима; значит, EI будет рациональна. Сделаем тогда, чтобы как число CA к AB, так был бы и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие); значит ⟨квадрат⟩ на EI соизмерим будет с ⟨квадратом⟩ на IH. Значит, рациональной будет и IH. И поскольку число CA не имеет к AB отношения, как квадратное число к квадратному числу, то и ⟨квадрат⟩ на EI не имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу. Значит, EI будет несоизмерима с IH линейно (предложение 9); значит, EI, IH будут рациональными соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, EH будет биномиалью (предложение 36).



Черт. 56.

Вот следует доказать, что и *второй*.

Действительно, поскольку «обращая» (предложение 7 книги V), будет, что как число BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на HI к ⟨квадрату⟩ на IE, но BA больше AC, зна-

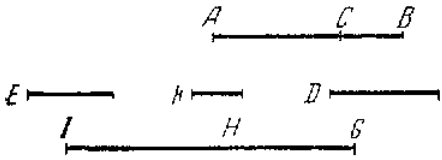
чит, [и] ⟨квадрат⟩ на HI больше ⟨квадрата⟩ на IE (предложение 14 книги V). Пусть ⟨квадрату⟩ на HI равны будут ⟨вместе взятые квадраты⟩ на EI, G; значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), будет, что как AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на G. Но AB имеет к BC отношение, как квадратное число к квадратному числу, значит, и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на G имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу. Значит, IH будет соизмерима с G линейно (предложение 9), так что IH в квадратах больше IE на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩. И IH, IE будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и EI — меньшая рациональ — будет линейно соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ D.

Значит, EH будет *второй* биномиалью (определения вторые, 2), что и требовалось доказать.

Предложение 50

Найти третью биномиаль (черт. 57).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы составленное из них AB имело к BC отношение, как квадратное число к квадратному числу, к AC же не имело бы отношения, как квадратное число к квадратному числу. Отложим же и какое-нибудь другое, не квадратное число D, и пусть оно к каждому из BA, AC не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; и отложим



Черт. 57.

какую-нибудь рациональную прямую E, и сделаем, чтобы как D к AB, так был бы и ⟨квадрат⟩ на E к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на E соизмерим с ⟨квадратом⟩ на IH (предложение 6). И E рациональна, значит, рациональной будет и IH. И поскольку D не имеет к AB отношения, как квадратное число к квадратному числу, то и ⟨квадрат⟩ на E не имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, E несоизмерима будет с IH линейно (пред-

ложение 9). Вот сделаем затем, чтобы как число *BA* к *AC*, так был бы и ⟨квадрат⟩ на *IH* к ⟨квадрату⟩ на *HG* (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на *IH* будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на *HG* (предложение 6). Но *IH* рациональна; рациональна, значит, и *HG*. И поскольку *BA* не имеет к *AC* отношения, как квадратное число к квадратному числу, то и ⟨квадрат⟩ на *IH* не имеет к ⟨квадрату⟩ на *GH* отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, *IH* несоизмерима будет с *HG* линейно (предложение 9). Значит, *IH*, *HG* будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, *IG* будет биномиалью (предложение 36).

Вот я утверждаю, что и *третьей*.

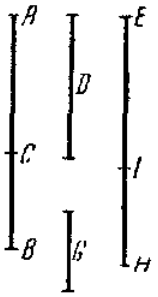
Действительно, поскольку будет, что как *D* к *AB*, так и ⟨квадрат⟩ на *E* к ⟨квадрату⟩ на *IH*, как же *BA* к *AC*, так и ⟨квадрат⟩ на *IH* к ⟨квадрату⟩ на *HG*, значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет, что как *D* к *AC*, так и ⟨квадрат⟩ на *E* к ⟨квадрату⟩ на *HG*. Но *D* не имеет к *AC* отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на *E* не имеет к ⟨квадрату⟩ на *HG* отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, *E* будет несоизмерима с *HG* линейно (предложение 9). И поскольку будет, что как *BA* к *AC*, так и ⟨квадрат⟩ на *IH* к ⟨квадрату⟩ на *HG*, то значит, ⟨квадрат⟩ на *IH* больше, чем ⟨квадрат⟩ на *HG* (предложение 14 книги V). Пусть теперь ⟨квадрату⟩ на *IH* будут равны ⟨вместе взятые квадраты⟩ на *HG*, *K*; значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), [будет], что как *AB* к *BC*, так и ⟨квадрат⟩ на *IH* к ⟨квадрату⟩ на *K*. Но *AB* имеет к *BC* отношение, как квадратное число к квадратному числу; и значит, ⟨квадрат⟩ на *IH* к ⟨квадрату⟩ на *K* имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит *IH* [будет] соизмеримо с *K* линейно. Значит, *IH* в квадратах больше *HG* на ⟨квадрат⟩ на с собой соизмеримой ⟨прямой⟩. И *IH*, *HG* будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩, и никакая из них не будет соизмерима с *E* линейно.

Значит, *IG* будет третьей биномиалью (определения вторые, 3), что и требовалось доказать.

Предложение 51

Найти четвёртую биномиаль (черт. 58).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы AB не имело ни к BC, ни также к AC отношения, как квадратное число к квадратному числу (предложение 28, лемма). И отложим рациональную ⟨прямую⟩ D, и пусть EI будет линейно соизмерима с D; значит, и EI будет рациональной. И сделаем, чтобы как число BA к AC, так был бы ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на EI будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на IH (предложение 6); значит, рациональной будет и IH. И поскольку BA не имеет к AC отношения, как квадратное число к квадратному числу, то и ⟨квадрат⟩ на EI не имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, EI несоизмерима будет с IH линейно (предложение 9). Значит, EI, IH будут рациональными, соизмеримыми только в степени прямыми; значит, EH будет биномиалью (предложение 36).



Черт. 58.

Вот я утверждаю, что и четвёртой.

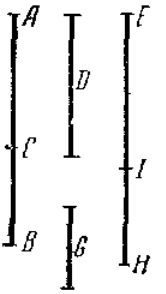
Действительно, поскольку будет, что как BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH [BA же больше чем AC], то значит, ⟨квадрат⟩ на EI больше ⟨квадрата⟩ на IH (предложение 14 книги V). Пусть теперь ⟨квадрату⟩ на EI равны будут ⟨вместе взятые квадраты⟩ на IH, G; значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), как число AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на G. Но AB не имеет к BC отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI не будет иметь к ⟨квадрату⟩ на G отношения, как квадратное число к квадратному числу. Значит, EI будет линейно несоизмерима с G (предложение 9); значит, EI в квадратах будет больше HI на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩. И EI, IH будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩, и EI соизмерима линейно с D.

Значит, EH будет четвёртой биномиалью (определения вторые, 4), что и требовалось доказать.

Предложение 52

Найти пятую биномиаль (черт. 59).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы AB не имело к каждому из них отношения, как квадратное число к квадратному числу (предложение 28, лемма), и отложим какую-нибудь рациональную прямую D, и пусть EI будет соизмерима [линейно] с D; значит, EI будет рациональной. И сделаем, чтобы как CA к AB, так был бы ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие). Но CA не имеет к AB отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI не имеет ⟨к квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу. Значит, EI, IH будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩ (предложение 9); значит, EH будет биномиалью (предложение 36).



Черт. 59.

Вот я утверждаю, что и пятой.

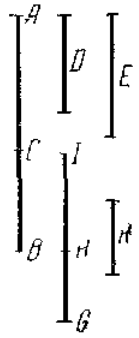
Действительно, поскольку будет, что как CA к AB, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на IH, то, «обращая» (предложение 7 книги V, следствие), как BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на IE; значит, ⟨квадрат⟩ на HI больше ⟨квадрата⟩ на IE (предложение 14 книги V). Пусть теперь ⟨квадрату⟩ на HI будут равны ⟨вместе взятые квадраты⟩ на EI, G; значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), будет, что как число AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на HI к ⟨квадрату⟩ на G. Но AB не имеет к BC отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на IH не имеет к ⟨квадрату⟩ на G отношения, как квадратное число к квадратному числу. Значит, IH несоизмерима с G линейно (предложение 9); так что IH в квадратах больше IE на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩. И HI, IE будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩, и меньшая рациональ EI будет линейно соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ D.

Значит, EH будет пятой биномиалью (определения вторые, 5), что и требовалось доказать.

Предложение 53

Найти шестую биномиаль (черт. 60).

Отложим два числа AC, CB так, чтобы AB не имело к каждому из них отношения, как квадратное число к квадратному числу (предложение 28, лемма); пусть же будет и другое число D, не являющееся квадратом и не имеющее к каждому из AB, BC отношения, как квадратное число к квадратному числу; и отложим некоторую рациональную прямую E, и сделаем, чтобы как D к AB, так и ⟨квадрат⟩ на E к ⟨квадрату⟩ на IH (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на E соизмерим с ⟨квадратом⟩ на IH (предложение 6). И E рациональна; рациональна, значит, и IH. И поскольку D не имеет к AB отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на E не имеет к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, E будет линейно несоизмерима с IH (предложение 9). Вот сделаем затем, чтобы как BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG (предложение 6, следствие). Значит, ⟨квадрат⟩ на IH соизмерим с ⟨квадратом⟩ на HG (предложение 6). Значит, ⟨квадрат⟩ на GH рационален; рациональна, значит, и GH. И поскольку BA не имеет к AC отношения, как квадратное число к квадратному числу, то и ⟨квадрат⟩ на IH не имеет к ⟨квадрату⟩ на HG отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, IH будет линейно несоизмерима с HG (предложение 9). Значит, IH, HG будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, IG будет биномиалью.



Черт. 60.

Вот следует доказать, что и шестой.

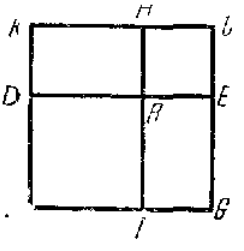
Действительно, поскольку будет, что как D к AB, так и ⟨квадрат⟩ на E к ⟨квадрату⟩ на IH, будет также, что и как BA к AC, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет, что как D к AC, так и ⟨квадрат⟩ на E к ⟨квадрату⟩ на HG. Но D не имеет к AC отношения, как квадратное число к квадратному числу; также, значит, и ⟨квад-

рат> на E не имеет к <квадрату> на HG отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, E будет линейно несоизмерима с HG (предложение 9). Доказано же, что она несоизмерима и с IH; значит каждая из IH, HG будет линейно несоизмерима с E. И поскольку будет, что как BA к AC, так и <квадрат> на IH к <квадрату> на HG, то значит, <квадрат> на IH больше <квадрата> на HG (предложение 14 книги V). Пусть теперь <квадрату> на IH равны будут <вместе взятые квадраты> на HG, K; значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), как AB к BC, так и <квадрат> на IH к <квадрату> на K. Но AB не имеет к BC отношения, как квадратное число к квадратному числу; так что и <квадрат> на IH не имеет к <квадрату> на K отношения, как квадратное число к квадратному числу. Значит, IH будет линейно несоизмерима с K (предложение 9); значит, IH в квадратах больше HG на <квадрат> на несоизмеримой с собой <прямой>. И IH, HG будут рациональными, соизмеримыми только в степени <прямыми>, и ни одна из них не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной <прямой> E.

Значит, IG будет шестой биномиалью (определения вторые, 6), что и требовалось доказать.

Лемма (47)

Пусть будут два квадрата AB, BC, и поместим их так, чтобы DB была по прямой с BE; значит, и IB будет по прямой с BH. И дополним параллелограмм AC; я утверждаю, что AC будет квадратом, и что DH будет средней пропорциональной для AB, BC, и ещё что DC будет средней пропорциональной для AC, CB (черт. 61).



Черт. 61.

Действительно, поскольку DB равна BI, BE же <равна> BH, то значит, вся DE будет равна всей IH. Но DE равна каждой из AG, KC, а IH равна каждой из AK, GC (предложение 34 книги I); и значит, каждая из AG, KC равна каждой из AK, GC. Значит, параллело-

грамм AC будет равносторонним; он же и прямоугольный; значит, AC будет квадратом.

И поскольку будет, что как IB к BH, так и DB к BE, но как IB к BH, так и AB к DH, как же DB к BE, так и DH к BC (предложение 1 книги VI), и значит, как AB к DH, так и DH к BC. Значит, для AB, BC средней пропорциональной будет DH.

Вот я утверждаю, что и для AC, CB средней пропорциональной [будет] DC.

Действительно, поскольку будет, что как AD к DK, так и KH к HC; ибо каждая равна [будет] каждой; и, «присоединяя» (предложение 18 книги V), как AK к KD, так и KC к CH, но как AK к KD, так и AC к CD, как же KC к CH, так и DC к CB, и значит, как AC к DC, так и DC к BC. Значит, для AC, CB средней пропорциональной будет DC; это и предложено было доказать *).

Предложение 54

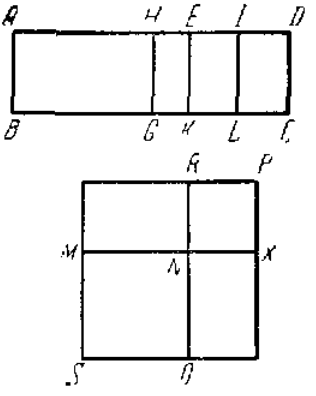
Если площадь заключается между рациональной ⟨прямой⟩ и первой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой биномиалью.

Пусть площадь AC заключается между рациональной ⟨прямой⟩ AB и первой биномиалью AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AC будет иррациональной, так называемой биномиалью (черт. 62).

Действительно, поскольку AD есть первая биномиаль, то разделим её в E на рационали, и пусть большая рациональ будет AE. Ясно вот, что AE, ED будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и что AE в квадратах будет больше ED на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩, и AE линейно соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ AB (определения вторые, 1). Разделим вот ED пополам в точке I. И поскольку AE в квадратах

*) Необычная форма заключения (ἃ προέκειτο δεῖξαι вместо ὅπερ ἔδει δεῖξαι), а также тот факт, что первая часть этой леммы, равносильная пропорции $x^2 : xy = xy : y^2$, по существу уже была доказана в предложении 11 книги VIII, заставляют сомневаться в подлинности этой леммы (Heath).

больше ED на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то значит, если к бо́льшей AE приложить с недостатком в виде квадрата ⟨площадь⟩, равную четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей, то-есть ⟨квадрату⟩ на EI, то она разделит её на соизмеримые ⟨части⟩. Приложим теперь к AE равный ⟨квадрату⟩ на EI ⟨прямоугольник⟩ между AH, HE; значит, AH соизмерима будет с EH линейно. И проведём из H, E, I параллельно каждой из AB, CD ⟨прямые⟩ HG, EK, IL; и построим равный ⟨параллелограмму⟩ AG квадрат SN, ⟨параллелограмму⟩ же HK равный ⟨квадрат⟩ NP (предложение 14 книги II), и расположим так, чтобы MN была по прямой с NX; значит, и RN будет по прямой с NO. И дополним параллелограмм SP; значит, SP будет квадратом (см. лемму). И поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AH, HE равен ⟨квадрату⟩ на EI, то значит, будет, что как AH к EI, так и IE к EH (предложение 17 книги VI); и значит, как AG к EL, ⟨так и⟩ EL к KH (предложение 1 книги VI); значит, EL будет средним пропорциональным для AG, HK. Но AG равен будет SN, HK же равен NP; значит, EL будет средним пропорциональным для SN, NP. Также и MR будет средним пропорциональным тех же самых SN, NP (см. лемму); значит, EL равен будет MR; так что он равен будет и OX (предложение 43 книги I). Также и AG, HK ⟨вместе⟩ равны будут SN, NP; значит, весь AC равен будет всему SP, то-есть ⟨квадрату⟩ на MX; значит, ⟨прямая⟩ MX будет квадрировать AC.



Черт. 62.

Я утверждаю, что MX будет биномиалью.

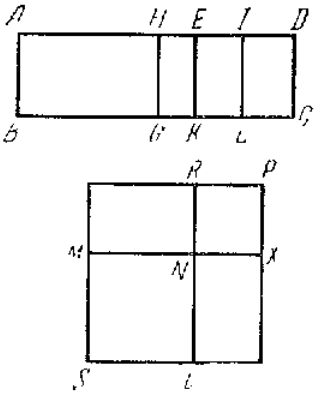
Действительно, поскольку AH соизмерима с HE, то и AE будет соизмеримой с каждой из AH, HE (предложение 15). Предполагается же и AE соизмеримой с AB; значит, и AH, HE будут соизмеримы с AB (предложение 12). И AB рациональна; рациональной, значит, будет и каждая из AH, HE (предложение 14); рациональным, значит, будет и каждый из AG, HK (предложение 19), и AG будет

соизмерим с HK. Но AG равен SN, HK же NP; и значит, SN, NP, то-есть ‹квадраты› на MN, NX, будут рациональны и соизмеримы. И поскольку AE несоизмерима с ED линейно, но AE соизмерима с AH, DE же соизмерима с EI, то значит, и AH несоизмерима с EI (предложение 13); так что и AG будет несоизмерима с EL (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Но AG равен SN, EL же MR; значит, и SN будет несоизмерим с MR. Но как SN к MR, ‹так и прямая› ON к NR (предложение 1 книги VI); значит, ON будет несоизмерима с NR (предложение 11). Но ON равна MN, NR же NX; значит, MN несоизмерима будет с NX. И ‹квадрат› на MN соизмерим с ‹квадратом› на NX, и каждый рационален; значит, MN, NX будут рациональными, соизмеримыми только в степени.

Значит, MX будет биномиалью (предложение 36) и квадрирует AC, что и требовалось доказать.

Предложение 55

Если площадь заключается между рациональной ‹прямой› и второй биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой первой бимедиалью.



Черт. 63.

Пусть площадь $ABCD$ заключается между рациональной ‹прямой› AB и второй биномиалью AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AC будет первой бимедиалью (черт. 63).

Действительно, поскольку AD есть вторая биномиаль, то разделим её в E на рационали так, чтобы AE была большей рациональю; значит, AE, ED будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и AE в квадратах более ED на ‹квадрат› на соизмеримой с собой ‹прямой›, и меньшая рациональ ED будет линейно соизмерима с AB (определения вторые, 2). Разделим ED пополам в I и к AE при-

ложим с недостатком в виде квадрата равный ⟨квадрату⟩ на EI ⟨прямоугольник⟩ AHE *); значит, AH будет линейно соизмерима с HE (предложение 17). И через H, E, I параллельно AB, CD проведём HG, EK, IL, и построим равный параллелограмму AG квадрат SN, ⟨параллелограмму⟩ же HK равный квадрат NP, и расположим так, чтобы MN была по прямой с HX; значит, и RN [будет] по прямой с NO. И дополним квадрат SP; тогда ясно из доказанного выше (предложение 53, лемма), что MR будет средним пропорциональным для SN, NP и равным EL и что MX квадрирует площадь AC. Вот следует доказать, что MX будет первой бимедиалью. Поскольку AE линейно несоизмерима с ED, ED же соизмерима с AB, то значит, и AE несоизмерима с AB (предложение 13). И поскольку AH соизмерима с EH, то и AE будет соизмеримой с каждой из AH, HE (предложение 15). Но AE линейно несоизмерима с AB; и значит, AH, HE будут несоизмеримы с AB (предложение 13). Значит, BA, AH, HE будут рациональными соизмеримыми только в степени; так что каждая из ⟨площадей⟩ AG, HK будет медиальной (предложение 21). Так что и каждый из SN, NP будет медиальным. И значит, MN, NX будут медиалями. И поскольку AH линейно соизмерима с HE, то и ⟨площадь⟩ AG будет соизмерима с HK, то-есть SN с NP, то-есть ⟨квадрат⟩ на MN с ⟨квадратом⟩ на NX (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X) [так что MN, NX будут соизмеримыми в степени]. И поскольку AE линейно несоизмерима с ED, но AE соизмерима с AH, ED же соизмерима с EI, то значит, AH несоизмерима с EI (предложение 13), так что и AG несоизмерима будет с EL, то-есть SN с MR, то-есть ⟨прямая⟩ ON с NR, то-есть MN будет линейно несоизмерима с NX (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Доказано же, что MN, NX являются и медиалями, и соизмеримыми в степени; значит, MN, NX будут медиалями, соизмеримыми только в степени. Вот я утверждаю, что они и заключают рациональную ⟨площадь⟩. Действительно, поскольку DE предполагается соизмеримой с каждой из

*) Т. е. произведение прямых $AH \cdot HE$.

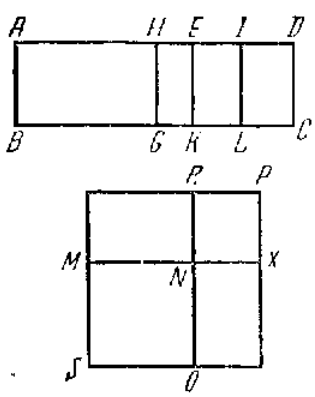
AB, *EI*, то значит, и *EI* соизмерима с *EK*. И каждая из них рациональна; рациональна, значит, и ⟨площадь⟩ *EL*, то-есть *MR* (предложение 19); *MR* же есть ⟨прямоугольник⟩ между *MN*, *NX*. Если же составляются две соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную ⟨площадь⟩, то целая будет иррациональной, называется же первой бимедиалью (предложение 37).

Значит, *MX* будет первой бимедиалью, что и требовалось доказать.

Предложение 56

Если площадь заключается между рациональной ⟨прямой⟩ и третьей биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой второй бимедиалью.

Пусть площадь *ABCD* заключается между рациональной ⟨прямой⟩ *AB* и третьей биномиалью *AD*, разделённой в *E* на рационали, из которых большей будет *AE*; я утверждаю, что квадрирующая площадь *AC* будет иррациональной, так называемой второй бимедиалью (черт. 64).



Черт. 64.

Действительно, произведём те же самые построения, что и раньше. И поскольку *AD* третья биномиаль, то значит, *AE*, *ED* будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и *AE* в квадратах более *ED* на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и никакая из *AE*, *ED* не [будет] соизмеримой с *AB* линейно (определения вторые, 3). Тогда, подобно вышедоказанному, покажем, что *MX* будет квадрирующей площадь *AC* и что *MN*, *NX* будут медиалями, соизмеримыми только в степени; так что *MX* будет бимедиалью.

Следует вот доказать, что и второй.

[И] поскольку *DE* несоизмерима линейно с *AB*, то-есть с *EK*, *DE* же соизмерима с *EI*, то значит, *EI* несоизмерима будет с *EK* линейно (предложение 13). И они рациональны;

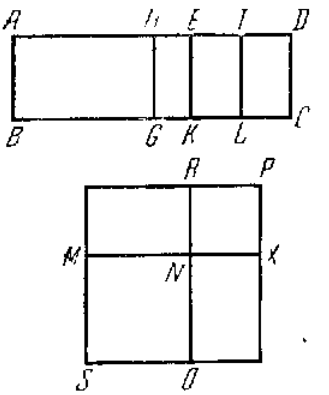
значит, IE, EK будут рациональными, соизмеримыми только в степени. Значит, ⟨площадь⟩ EL, то-есть MR [будет] медиальной (предложение 21); и она заключается между MN, NX; значит, ⟨прямоугольник⟩ MNX*) будет медиальным.

Значит, MX будет второй бимедиалью (предложение 38), что и требовалось доказать.

Предложение 57

Если площадь заключается между рациональной ⟨прямой⟩ и четвёртой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой «большей».

Пусть площадь AC заключается между рациональной ⟨прямой⟩ AB и четвёртой биномиалью AD, разделённой в E на рационали, из которых большей пусть будет AE; я утверждаю, что квадрирующая площадь AC будет иррациональной так называемой «большей» (черт. 65).



Черт. 65.

Действительно, поскольку AD четвёртая биномиаль, то значит, AE, ED будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и AE в квадратах более ED на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, и AE [будет] линейно соизмерима с AB (определения вторые, 4). Разделим DE пополам в I и приложим к AE равный ⟨квадрату⟩ на EI параллелограмм, что между AH, HE; значит, AH будет линейно несоизмерима с HE (предложение 18). Параллельно AB проведём HG, EK, IL и сделаем остальное то же самое, что пред этим; тогда ясно, что квадрирующей площадь AC будет MX. Следует вот доказать, что MX будет иррациональной, так называемой «бо́льшей». Поскольку AI несоизмерима с EH линейно, то и ⟨площадь⟩ AG будет несоизмерима с HK, то-есть SN с NP (предложение 1

*) То-есть $MN \cdot NX$.

книги VI; предложение 11 книги X); значит, MN, NX будут несоизмеримы в степени. И поскольку AE соизмерима с AB линейно, то AK будет рациональной ⟨площадью⟩ (предложение 19); и она равна ⟨вместе взятым квадратам⟩ на MN, NX; значит, рациональным будет и составленное из ⟨квадратов⟩ на MN, NX. И поскольку DE [будет] несоизмеримой линейно с AB, то-есть с EK (предложение 13), но DE будет соизмерима с EI, то значит, EI будет несоизмерима с EK линейно (предложение 13). Значит, EK, EI будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, ⟨площадь⟩ LE, то-есть MR, медиальна (предложение 21). И заключается она между MN, NX; значит, ⟨прямоугольник⟩ между MN, NX будет медиальным. И [составленное] из ⟨квадратов⟩ на MN, NX рационально, и MN, NX будут несоизмеримыми в степени. Если же составляются две прямые, несоизмеримые в степени, делающие составленное из квадратов на них рациональным, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальным, то целая ⟨прямая⟩ будет иррациональной, называется же «большей» (предложение 39).

Значит, MX будет иррациональной, так называемой «большей», и квадрирует площадь AC, что и требовалось доказать.

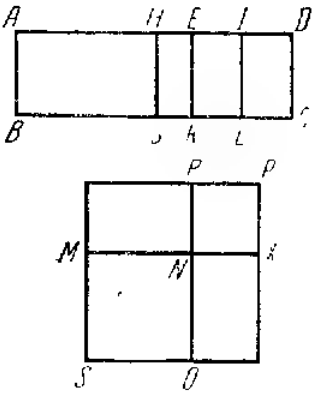
Предложение 58

Если площадь заключается между рациональной ⟨прямой⟩ и пятой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой рационально и медиально квадрирующей.

Пусть площадь AC заключается между рациональной ⟨прямой⟩ AB и пятой биномиалью AD, разделённой в E на рациональ так, чтобы большей была AE; я утверждаю [тогда], что квадрирующая площадь AC будет иррациональной, так называемой рационально и медиально квадрирующей (черт. 66).

Действительно, произведём те же самые ⟨построения⟩, что и в доказанных выше; тогда ясно, что квадрирующей площадь AC будет MX. Следует вот доказать, что MX будет рационально и медиально квадрирующей. Действи-

тельно, поскольку AH несоизмерима с HE (предложение 18), то значит, и ⟨площадь⟩ AG будет несоизмерима с GE, то-есть ⟨квадрат⟩ на MN с ⟨квадратом⟩ на NX (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X); значит, MN, NX будут несоизмеримыми в степени. И поскольку AD есть пятая биномиаль, и меньшим её отрезком [будет] ED, то значит, ED линейно соизмерима с AB (определения вторые, 5). Но AE несоизмерима с ED; и значит, AB будет линейно несоизмерима с AE (предложение 13) [BA, AE будут рациональными, соизмеримыми только в степени]; значит, ⟨площадь⟩ AK, то-есть составленное из ⟨квадратов⟩ на MN, NX будет медиальным (предложение 21). И поскольку DE будет линейно соизмерима с AB, то-есть с EK, но DE соизмерима с EI, значит, и EI будет соизмерима с EK (предложение 12). И EK рациональна; рациональна, значит, и ⟨площадь⟩ EL, то-есть MR, то-есть ⟨прямоугольник⟩ MNX*) (предложение 19); значит, MN, NX будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальным, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональным.



Черт. 66.

Значит, MX будет рациональной и медиально квадрирующей (предложение 50) и квадрирует площадь AC, что и требовалось доказать.

Предложение 59

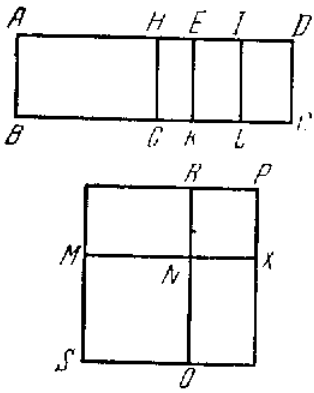
Если площадь заключается между рациональной ⟨прямой⟩ и шестой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональной, так называемой бимедиально квадрирующей.

Пусть площадь $ABCD$ заключается между рациональной ⟨прямой⟩ AB и шестой биномиалью AD, разделённой в E на рационали, так, чтобы большей рациональю была

*) Произведение $MN \cdot NX$.

AE; я утверждаю, что квадрирующая *AC* будет бимедиально квадрирующей (черт. 67).

[Действительно], произведём те же самые, что и в вышедоказанных, ⟨построения⟩. Тогда ясно, что квадрирующей ⟨площадь⟩ *AC* будет *MX*, и что *MN* будет несоизмерима в степени с *NX*. И поскольку *EA* будет линейно несоизмерима с *AB* (определения вторые, 6), то значит, *EA*, *AB* будут рациональными соизмеримыми только в степени; значит, ⟨площадь⟩ *AK*, то-есть составленное из ⟨квадратов⟩ на *MN*, *NX*, будет медиальным (предложение 21). Затем, поскольку *ED* линейно несоизмерима с *AB* (определения вторые, 6), то значит, и *IE* будет несоизмерима с *EK* (предложение 13); значит, *IE*, *EK* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, ⟨площадь⟩ *EL*, то-есть *MR*, то-есть ⟨прямоугольник⟩ *MNX**), будет медиальным (предложение 21). И поскольку *AE* несоизмерима с *EI*, то и ⟨площадь⟩ *AK* будет несоизмерима с *EL* (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Но *AK* будет составленным из ⟨квадратов⟩ на *MN*, *NX*, а *EL* будет ⟨прямоугольник⟩ *MNX*; несоизмеримы, значит, будут составленное из ⟨квадратов⟩ на *MN*, *NX* и ⟨прямоугольник⟩ *MNX*. И каждое из них будет медиальным, и *MN*, *NX* будут несоизмеримыми в степени.



Черт. 67.

Значит, *MX* будет бимедиально квадрирующей (предложение 51) и квадрирует ⟨площадь⟩ *AC*, что и требовалось доказать.

[Лемма (48)

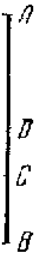
Если прямая линия рассечена на неравные, то квадраты на неравных будут больше дважды прямоугольника, заключающегося между неравными**).

*) То-есть $MN \cdot NX$.

**) Гейберг считает эту лемму неподлинной, поскольку Евклид уже молчаливо использовал её при доказательстве предложения 44. Она легко получается из предложения 7 книги II.

Пусть прямая будет AB; рассечём ⟨её⟩ на неравные в C, и пусть большей будет AC; я утверждаю, что ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB (черт. 68).

Действительно, рассечём AB пополам в D. Поскольку теперь прямая линия рассечена на равные в D, на неравные же в C, то значит, ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB вместе с ⟨квадратом⟩ на CD будет равен ⟨квадрату⟩ на AD (предложение 5 книги II); так что ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB будет меньше ⟨квадрата⟩ на AD; значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB будет меньше удвоенного ⟨квадрата⟩ на AD. Но ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB вдвое больше [будут] ⟨квадратов⟩ на AD, DC (предложение 9 книги II); [значит, ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB, что и требовалось доказать].

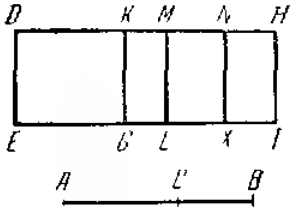


Черт. 68.

Предложение 60

⟨Квадрат⟩ на биномиали, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной первую биномиаль.

Пусть будет биномиаль AB, рассечённая в C на рационали так, чтобы большей рациональю была AC; отложим рациональную ⟨прямую⟩ DE, и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB ⟨параллелограмм⟩ $DEIH$, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет первой биномиалью (черт. 69).



Черт. 69.

Действительно, приложим к DE равную ⟨квадрату⟩ на AC ⟨площадь⟩ DG, ⟨квадрату⟩ же на BC равную ⟨площадь⟩ KL; остающийся, значит (предложение 4 книги II), дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB равен будет ⟨площади⟩ MI. Разделим MH пополам в N и проведём NX параллельно [каждой из ML, HI]. Значит, каждый из MX, NI будет равен один раз ⟨взятому прямоугольнику⟩

ACB*). И поскольку AB — биномиаль, рассечённая в C на рационали, то значит, AC, CB будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 36); значит, ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут рациональны и соизмеримы между собой; так что и составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB [соизмеримо будет с ⟨квадратами⟩ на AC, CB (предложение 15); значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB будет рациональным]. И равно оно DL; значит, DL будет рациональным. И прилагается он к рациональной DE; значит, DM будет рациональна и соизмерима с DE линейно (предложение 20). Затем, поскольку AC, CB будут рациональными, соизмеримыми только в степени, то значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, то-есть MI, будет медиальным (предложение 21). И прилагается он к рациональной ML; значит, и MH будет рациональна и линейно несоизмерима с ML, то-есть с DE (предложение 22). Также и MD рациональна и линейно соизмерима с DE; значит, DM будет линейно несоизмерима с MH (предложение 13). И они рациональны; значит, DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).

Следует вот доказать, что и первой.

Поскольку для ⟨квадратов⟩ на AC, CB средним пропорциональным будет ⟨прямоугольник⟩ ACB*) (лемма предложения 21), то значит, и для DG, KL средним пропорциональным будет MX. Значит, будет, что как DG к MX, так и MX к KL, то-есть (предложение 1 книги VI) как ⟨прямые⟩ DK к MN, ⟨так и⟩ MN к MK; значит, ⟨прямоугольник⟩ между DK, KM будет равен ⟨квадрату⟩ на MN (предложение 17 книги VI). И поскольку ⟨квадрат⟩ на AC соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CB, то и ⟨площадь⟩ DG соизмерима будет с KL; так что и ⟨прямая⟩ DK будет соизмерима с KM (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB (см. лемму), то значит, и ⟨площадь⟩ DL больше MI;

*) То-есть $AC \cdot CB$.

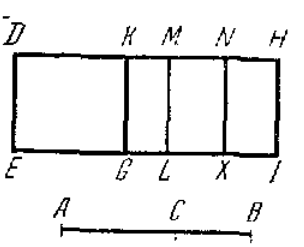
так что и ⟨прямая⟩ DM будет больше MH (предложение 1 книги VI; предложение 14 книги V). И ⟨прямоугольник⟩ между DK, KM будет равен ⟨квадрату⟩ на MN, то-есть четверти ⟨квадрата⟩ на MH, и DK соизмерима с KM. Если же будут две неравные прямые, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей, и если он разделяет её на соизмеримые ⟨части⟩, то в квадратах бо́льшая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩ (предложение 17); значит, DM в квадратах будет больше MH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой. И DM, MH суть рациональные ⟨прямые⟩, и DM, будучи большей рациональю, соизмерима будет линейно с отложенной рациональной ⟨прямой⟩ DE.

Значит, DH будет первой биномиалью (определения вторые, 1), что и требовалось доказать.

Предложение 61

Квадрат на первой бимедиали, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной вторую биномиаль.

Пусть будет первая бимедиаль AB, разделённая в C на медиали, из которых большая AC; отложим рациональную ⟨прямую⟩ DE и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB параллелограмм DI, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет второй биномиалью (черт. 70).



Черт. 70.

Действительно, произведём те же самые ⟨построения⟩, что и выше. И поскольку AB – первая бимедиаль, рассечённая в C, то значит, AC, CB будут соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональную ⟨площадь⟩ (предложение 37); так что и ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут меднальными (предложение 21). Меднальной, значит, будет и ⟨площадь⟩ DL. И прилагается она к рациональной ⟨прямой⟩ DE; значит, MD будет рациональна и несоизмерима с DE линейно (предложение 22). Затем, поскольку рацио-

нален дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, рациональна будет и ⟨площадь⟩ MI. И прилагается она к рациональной ML; рациональной, значит, [будет] и MH, и линейно соизмеримой с ML, то-есть с DE (предложение 22); значит, DM несоизмерима будет линейно с MH (предложение 13). И они рациональны; значит, DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).

Следует вот доказать, что и второй.

Действительно, поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AC, CB, то значит, и ⟨площадь⟩ DL больше MI (предложение 9, лемма); так что и DM ⟨больше⟩ MH. И поскольку ⟨квадрат⟩ на AC соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CB, то и ⟨площадь⟩ DG соизмерима с KL; так что и ⟨прямая⟩ DK будет соизмерима с KM (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И ⟨прямоугольник⟩ DKM*) равен ⟨квадрату⟩ на MN; значит, DM в квадратах больше MH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 17). И MH линейно соизмерима с DE.

Значит, DH будет второй биномиалью (определения вторые, 2).

Предложение 62

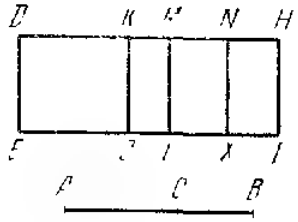
⟨Квадрат⟩ на второй бимедиали, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной третью биномиаль.

Пусть будет вторая бимедиаль AB, разделённая в C на медиали так, чтобы большим отрезком был AC, пусть же будет какая-нибудь рациональная DE, и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB параллелограмм DI, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет третьей биномиалью (черт. 71).

Действительно, произведём те же самые ⟨построения⟩, что и в вышедоказанных. И поскольку AB — вторая бимедиаль, разделённая в C, то значит, AC, CB будут соизмеримые только в степени медиали, заключающие медиальную

*) То-есть $DK \cdot KM$.

⟨площадь⟩ (предложение 38); так что и составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB будет медиальным. И они равны DL; медиальной, значит, будет и ⟨площадь⟩ DL. И прилагается она к рациональной DE; значит, и ⟨прямая⟩ MD будет рациональна и несоизмерима с DE линейно (предложение 22). На том же вот основании и MH будет рациональной и линейно несоизмеримой с ML, то-есть с DE; значит, каждая из DM, MH рациональна и линейно несоизмерима с DE. И поскольку AC линейно несоизмерима с CB, как же AC к CB, так и ⟨квадрат⟩ на AC к ⟨прямоугольнику⟩ ACB *) (предложение 21, лемма), то значит, и ⟨квадрат⟩ на AC несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ ACB *) (предложение 11). Так что и составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB будет несоизмеримым с дважды ⟨прямоугольником⟩ ACB *), то-есть ⟨площадь⟩ DL с ML; так что и ⟨прямая⟩ DM будет несоизмерима с MH (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И они рациональны; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).



Черт. 71.

Следует [вот] доказать, что и третьей.

Подобно вот предыдущему заключаем, что DM будет больше MH и DK соизмерима с KM. И ⟨прямоугольник⟩ DKM **) равен ⟨квадрату⟩ на MN; значит, DM в квадратах более MH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 17). И никакая из DM, MH не будет линейно соизмеримой с DE.

Значит, DH будет третьей биномиалью (вторые определения, 3), что и требовалось доказать.

Предложение 63

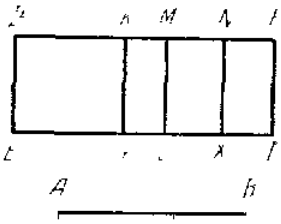
Квадрат на большей ⟨иррациональной⟩, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной четвёртую биномиаль.

*) То-есть $AC \cdot CB$.

**) То-есть $DK \cdot KM$.

Пусть будет «бо́льшая» ⟨иррациональная⟩ AB, разделённая в C так, чтобы AC была больше CB, рациональная же ⟨прямая⟩ DE, и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB параллелограмм DI, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет четвёртой биномиалью (черт. 72).

Произведём те же самые построения, что и в вышедоказанных. И поскольку AB есть «бо́льшая» ⟨иррациональная⟩, разделенная в C, то AC, CB будут несоизмеримыми в степени ⟨прямыми⟩, образующими составленное из квадратов на них рациональное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальный (предложение 39). Поскольку теперь составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB рационально, то значит, ⟨площадь⟩ DL будет рациональной; рациональна, значит, и ⟨прямая⟩ DM и линейно соизмерима с DE (предложение 20). Затем, поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, то-есть MI, медиален и находится при рациональной ML, то значит, и MH будет рациональной и линейно несоизмеримой с DE (предложение 22); значит, и DM будет линейно несоизмерима с MH (предложение 13). Значит, DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).



Черт. 72.

Следует [вот] доказать, что и четвёртой.

Подобно вот тому, как выше, докажем, что DM будет больше MH и что ⟨прямоугольник⟩ DKM*) равен ⟨квадрату⟩ на MN. Поскольку теперь ⟨квадрат⟩ на AC несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на CB, то значит, и ⟨площадь⟩ DG несоизмерима с KL; так что и ⟨прямая⟩ DK будет несоизмерима с KM. Если же будут две неравные прямые и к большей приложен с недостатком в виде квадрата равный четвёртой части ⟨квадрата⟩ на меньшей параллелограмм и если он разделяет её на несоизмеримые ⟨части⟩, то в квадратах большая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на линейно несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩ (предложение 18);

*) То-есть $DK \cdot KM$.

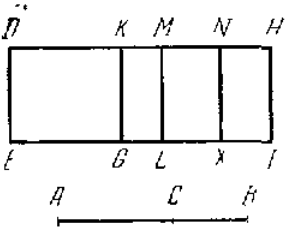
значит, DM в квадратах более MH на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой ⟨прямой⟩. И DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩, и DM соизмерима с отложенной рациональной DE.

Значит, DH будет четвёртой биномиалью (определения вторые, 4), что и требовалось доказать.

Предложение 64

⟨Квадрат⟩ на рационально и медиально квадрирующей, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной пятую биномиаль.

Пусть будет рационально и медиально квадрирующая AB, разделённая на прямые в C, так, чтобы AC была большей; отложим рациональную ⟨прямую⟩ DE и приложим к DE равный ⟨квадрату⟩ на AB ⟨параллелограмм⟩ DI, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет пятой биномиалью (черт. 73).



Черт. 73.

Произведём те же самые ⟨построения⟩, что и выше. Поскольку теперь AB есть рационально и медиально квадрирующая, разделённая в C, то значит, AC, CB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный (предложение 40). Поскольку теперь составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB медиально, то значит, ⟨площадь⟩ DL будет медиальной; так что DM будет рациональной и линейно несоизмеримой с DE (предложение 22). Затем, поскольку рационален дважды ⟨прямоугольник⟩ ACB *), то-есть MI, то значит, ⟨прямая⟩ MH рациональна и соизмерима с DE (предложение 20). Значит, DM несоизмерима с MH (предложение 13); значит, DM, MH будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, DH будет биномиалью (предложение 36).

---

*) То-есть $AC \cdot CB$.

Вот я утверждаю, что и пятой.

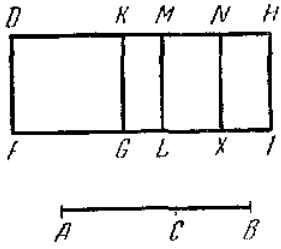
Действительно, подобным же образом докажется, что ⟨прямоугольник⟩ DKM*) будет равен ⟨квадрату⟩ на MN и DK несоизмерима с KM линейно; значит, DM в квадратах более MH на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 18). И DM, MH [рациональные] соизмеримые только в степени, и меньшая MH соизмерима с DE линейно.

Значит, DH будет пятой биномиалью (определения вторые, 5), что и требовалось доказать.

Предложение 65

⟨Квадрат⟩ на бимедиально квадрирующей, приложенный к рациональной ⟨прямой⟩, образует шириной шестую биномиаль.

Пусть будет бимедиально квадрирующая AB, разделённая в C, рациональная же пусть будет DE, и к DE приложим равный ⟨квадрату⟩ на AB ⟨параллелограмм⟩ DI, образующий ширину DH; я утверждаю, что DH будет шестой биномиалью (черт. 74).



Черт. 74.

Действительно, произведём те же самые ⟨построения⟩, что выше. И поскольку AB будет бимедиально квадрирующей, разделённой в C, то значит, AC, CB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, и ещё составленное из квадратов на них несоизмеримым с ⟨прямоугольником⟩ между ними (предложение 41); так что, согласно вышедоказанному, каждая из ⟨площадей⟩ DL, MI будет медиальной. И они прилагаются к рациональной DE; значит, каждая из ⟨прямых⟩ DM, MH будет рациональной и линейно несоизмеримой с DE (предложение 22). И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на

*) То-есть $DK \cdot KM$.

AC, *CB* несоизмеримо с дважды ⟨прямоугольником⟩ между *AC*, *CB*, то значит, и ⟨площадь⟩ *DL* несоизмерима с *MI*. Значит, и ⟨прямая⟩ *DM* несоизмерима с *MH* (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X); значит, *DM*, *MH* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *DH* будет биномиалью (предложение 36).

Вот я утверждаю, что и шестой.

Опять вот подобным же образом докажем, что ⟨прямоугольник⟩ *DKM**) будет равен ⟨квадрату⟩ на *MN* и что *DK* будет линейно несоизмерима с *KM*; и вот на том же основании *DM* в квадратах больше *MH* на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно (предложение 18). И никакая из *DM*, *MH* не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной *DE*.

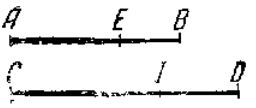
Значит, *DH* будет шестой биномиалью (определения вторые, 6), что и требовалось доказать.

Предложение 66

Линейно соизмеримая с биномиалью и сама будет биномиалью, и той же самой по рангу (49).

Пусть будет биномиаль *AB* и пусть *CD* будет линейно соизмерима с *AB*; я утверждаю, что *CD* будет биномиалью, и той же самой по рангу, что *AB* (черт. 75).

Действительно, поскольку *AB* биномиаль, то разделим её на рациональ в *E*, и пусть *AE* будет большей рациональю; значит, *AE*, *EB* будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩ (предложение 36). Сделаем (предложение 12 книги VI), чтобы как *AB* к *CD*, так и *AE* к *CI*; и значит, остаток *EB* будет к остатку *ID*, как *AB* к *CD* (книга V, предложения 16 и 19, следствие). Но *AB* линейно соизмерима с *CD*; значит, и *AE* будет соизмерима с *CI*, *EB* же — с *ID* (предложение 11). И *AE*, *EB* рациональны; значит, и *CI*, *ID* будут рациональны. И [поскольку] будет, что как *AE* к *CI*, ⟨так и⟩ *EB* к *ID* (предложение 11 книги V),



Черт 75.

*) То-есть *DK*·*KM*.

то значит, «переставляя» (предложение 16 книги V), будет, что как AE к EB, ⟨так и⟩ CI к ID. Но AE, EB соизмеримы только в степени; значит, и CI, ID будут соизмеримы только в степени (предложение 11). И они рациональны; значит, CD будет биномиалью (предложение 36).

Вот я утверждаю, что по рангу она будет той же самой, что AB.

Действительно, AE в квадратах будет больше EB или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой. Если теперь AE в квадратах больше EB на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то и CI в квадратах будет больше ID на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 14). И если AE соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, то и CI будет с ней соизмерима (предложение 12), и вследствие этого каждая из AB, CD будет первой биномиалью (определения вторые, 1), то-есть той же самой по рангу. Если же EB соизмерима с отложенной рациональной, то и ID будет с ней соизмерима (предложение 12), и вследствие этого опять будет по рангу той же, что AB; ибо каждая из них будет второй биномиалью (определения вторые, 2). Если же никакая из AE, EB не будет соизмерима с отложенной рациональной, то никакая из CI, ID не будет с ней соизмеримой (предложение 13), и каждая будет третьей (определения вторые, 3). Если же AE в квадратах более EB на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, то и CI в квадратах больше ID на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 14). И если AE соизмерима с отложенной рациональной, то и CI будет с ней соизмерима (предложение 12), и каждая будет четвёртой (определения вторые, 4). Если же EB ⟨будет соизмерима⟩, то и ID, и каждая будет пятой (определения вторые, 5). Если же никакая из AE, EB ⟨несоизмерима⟩, то и никакая из CI, ID не будет соизмерима с отложенной рациональной, и каждая будет шестой (определения вторые, 6).

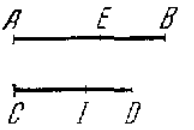
Таким образом, линейно соизмеримая с биномиалью будет биномиалью, и той же самой по рангу, что и требовалось доказать.

Предложение 67

Линейно соизмеримая с бимедиалью и сама будет бимедиалью, и той же самой по рангу.

Пусть будет бимедиаль AB, и пусть CD будет линейно соизмерима с AB; я утверждаю, что CD будет бимедиалью, и той же самой по рангу, что AB (черт. 76).

Действительно, поскольку AB бимедиаль, то разделим её на медиали в E; значит, AE, EB будут медиалями, соизмеримыми только в степени. И сделаем, чтобы как AB к CD, ⟨так и⟩ AE к CI (предложение 12 книги VI); и значит (книга V, предложения 16 и 19, следствие), остаток EB к остатку ID будет как AB к CD. Но AB линейно соизмерима с CD; значит, и каждая из AE, EB будет соизмерима с каждой из CI, ID (предложение 11). Но AE, EB медиали; медиали, значит, и CI, ID (предложение 23). И поскольку будет, что как AE к EB, ⟨так и⟩ CI к ID, и AE, EB соизмеримы только в степени, то [значит] и CI, ID будут соизмеримы только в степени (предложение 11). Доказано же, что они и медиали; значит, CD будет бимедиалью.



Черт. 76.

Вот я утверждаю, что и по рангу она будет той же самой, что AB.

Действительно, поскольку будет, что как AE к EB, ⟨так и⟩ CI к ID, то значит (предложение 21, лемма), и как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨прямоугольнику⟩ AEB*), так и ⟨квадрат⟩ на CI к ⟨прямоугольнику⟩ CID**); «переставляя» (предложение 16 книги V), как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨квадрату⟩ на CI, так и ⟨прямоугольник⟩ AEB*) к ⟨прямоугольнику⟩ CID**). ⟨Квадрат⟩ же на AE соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CI; значит, и ⟨прямоугольник⟩ AEB*) соизмерим с ⟨прямоугольником⟩ CID**) (предложение 11). Если теперь ⟨прямоугольник⟩ AEB*) рационален, то и ⟨прямоугольник⟩ CID**) будет рационален [и вследствие

---

*) То-есть $AE \cdot EB$.
**) То-есть $CI \cdot ID$.

этого будет первая бимедиаль]. Если же медиален ⟨первый⟩, то медиален ⟨и второй⟩ (предложение 23, следствие) и каждая будет второй ⟨бимедиалью⟩ (предложения 37, 38).

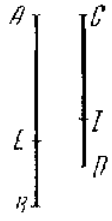
И вследствие этого CD будет той же самой по рангу, что и AB, что и требовалось доказать.

Предложение 68

Соизмеримая с «большей» иррациональной и сама будет «большей».

Пусть будет «бо́льшая» ⟨иррациональная⟩ AB, и пусть CD будет соизмерима с AB; я утверждаю, что CD будет «большей» ⟨иррациональной⟩ (черт. 77).

Разделим AB в E; значит, AE, EB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них рациональное, произведение же из них медиальное (предложение 39); и сделаем то же самое, что и выше. И поскольку будет, что как AB к CD, так и AE к CI, и EB к ID, и значит, как AE к CI, так и EB к ID (предложение 11 книги V). Но AB соизмерима с CD; значит, и каждая из AE, EB соизмерима с каждой из CI, ID (предложение 11). И поскольку будет, что как AE к CI, так и EB к ID, и «переставляя» (предложение 16 книги V), как AE к EB, так и CI к ID, и значит, «присоединяя» (предложение 18 книги V), будет, что как AB к BE, так и CD к DI; и значит, как ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на BE, так и ⟨квадрат⟩ на CD к ⟨квадрату⟩ на DI (предложение 20 книги VI). Подобным вот образом докажем, что и как ⟨квадрат⟩ на AB к квадрату на AE, так и ⟨квадрат⟩ на CD к ⟨квадрату⟩ на CI. И значит, как ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AE, EB, так и ⟨квадрат⟩ на CD к ⟨квадратам⟩ на CI, ID; и «переставляя» (предложение 16 книги V), значит, будет, что как ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨квадрату⟩ на CD, так и ⟨квадраты⟩ на AE, EB к ⟨квадратам⟩ на CI, ID. ⟨Квадрат⟩ же на AB соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CD; значит, и ⟨квадраты⟩ на AE, EB соизмеримы с ⟨квадратами⟩ на CI, ID (предло-



Черт. 77.

жение 11). И ⟨квадраты⟩ на AE, EB вместе будут рациональны, ⟨значит⟩, и ⟨квадраты⟩ на CI, ID вместе будут рациональны. Подобным же образом и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB будет соизмерим с дважды ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID. И дважды ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB медиален; медиален, значит, и дважды ⟨прямоугольник⟩ между CI, ID (предложение 23, следствие). Значит, CI, ID будут несоизмеримыми в степени (предложение 13), образующими составленное из квадратов на них вместе рациональное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный; значит, вся CD будет иррациональной, так называемой «большей» (предложение 39).

Итак, соизмеримая с «большей» будет «большей», что и требовалось доказать.

Предложение 69

Соизмеримая с рационально и медиально квадрирующей [и сама] будет рационально и медиально квадрирующей.

Пусть будет рационально и медиально квадрирующая AB, и пусть CD будет соизмерима с AB; следует доказать, что и CD будет рационально и медиально квадрирующей (черт. 78).

Черт. 78.

Разделим AB на прямые в E; значит, AE, EB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный (предложение 40); и устроим то же самое, что и раньше. Вот подобным же образом докажем, что и CI, ID будут несоизмеримыми в степени, и составленное из ⟨квадратов⟩ на AE, EB соизмеримо с составленным из ⟨квадратов⟩ на CI, ID, ⟨прямоугольник⟩ же между AE, EB ⟨соизмерим⟩ с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID; так что и составленное из квадратов на CI, ID будет медиальным, ⟨прямоугольник⟩ же между CI, ID — рациональным.

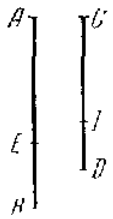
Значит, CD будет рационально и медиально квадрирующей, что и требовалось доказать.

Предложение 70

Соизмеримая с бимедиально квадрирующей будет бимедиально квадрирующей.

Пусть будет бимедиально квадрирующая AB, и CD соизмерима с AB; следует доказать, что и CD будет бимедиально квадрирующей (черт. 79).

Действительно, поскольку AB бимедиально квадрирующая, то разделим её на прямые в E; значит, AE, EB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из [квадратов] на них медиальное, и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, и ещё составленное из квадратов на AE, EB несоизмеримое с ⟨прямоугольником⟩ между AE, EB (предложение 41); и устроим то же самое, что и раньше. Вот подобным же образом докажем, что и CI, ID будут несоизмеримы в степени, и составленное из ⟨квадратов⟩ на AE, EB соизмеримо с составленным из ⟨квадратов⟩ на CI, ID, ⟨прямоугольник⟩ же между AE, EB ⟨соизмерим⟩ с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID; так что и составленное из квадратов на CI, ID будет медиально и ⟨прямоугольник⟩ между CI, ID медиален, и ещё составленное из квадратов на CI, ID несоизмеримо с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID.



Черт. 79.

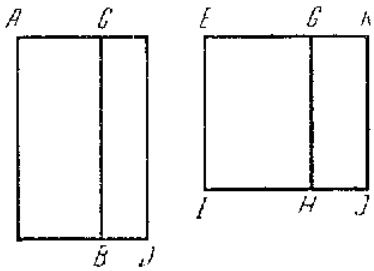
Значит, CD будет бимедиально квадрирующей, что и требовалось доказать.

Предложение 71

При соединении рационального и медиального возникают четыре иррациональных — или биномиаль, или первая бимедиаль, или «бо́льшая» ⟨иррациональная⟩, или рационально и медиально квадрирующая (50).

Пусть рациональное будет ⟨площадь⟩ AB, медиальное же CD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AD будет или биномиалью, или первой бимедиалью, или «бо́льшей» ⟨иррациональной⟩, или рационально и медиально квадрирующей (черт. 80).

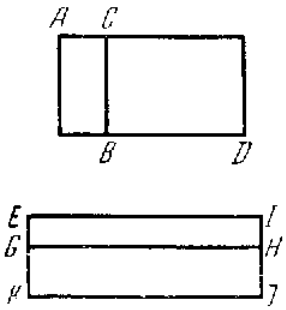
Действительно, AB будет или больше, или меньше CD. Пусть она сначала будет больше; и отложим рациональную EI, и приложим к EI равную AB ⟨площадь⟩ EH, образующую ширину EG; приложим к EI и равную DC ⟨площадь⟩ GJ, образующую ширину GK. И поскольку ⟨площадь⟩ AB рациональна и равна EH, то рациональной будет и EH. И она прилагается к [рациональной] EI, образуя ширину EG, значит, EG будет рациональна и соизмерима с EI линейно (предложение 20). Затем, поскольку CD медиальна и равна GJ, то значит, медиальной будет и GJ. И она прилагается к рациональной EI, образуя ширину GK; значит, GK будет рациональна и несоизмерима с EI линейно (предложение 22). И поскольку CD медиальна, AB же рациональна, то значит, AB будет несоизмерима с CD; так что и EH будет несоизмерима с GJ. Как же ⟨площадь⟩ EH к GJ, так будет и ⟨прямая⟩ EG к GK (предложение 1 книги VI); значит, и EG будет несоизмерима с GK линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, EG, GK будут рациональными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, EK будет биномиалью, разделённой в G (предложение 36). И поскольку ⟨площадь⟩ AB больше CD и AB равна EH, CD же GJ, то значит, и EH больше GJ; и значит, EG будет больше GK (предложение 14 книги V). Теперь EG в квадратах больше GK или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно, или на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой. Пусть сначала будет в квадратах больше на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой; и бо́льшая GE будет соизмерима с отложенной рациональной EI; значит, EK будет первой биномиалью (определения вторые, 1). Но EI рациональна; если же площадь заключается между рациональной и первой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет биномиалью (предложение 54). Значит, квадрирующая ⟨площадь⟩ EJ будет биномиалью; так что и квадрирующая ⟨площадь⟩ AD будет биномиалью. Но вот пусть EG будет



Черт. 80.

в квадратах больше GK на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой; и бо́льшая EG будет соизмерима линейно с отложенной рациональной EI; значит, EK будет четвёртой биномиалью (определения вторые, 4). Но EI рациональна; если же площадь заключается между рациональной и четвёртой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет иррациональная, так называемая «бо́льшая» (предложение 57). Значит, квадрирующая площадь EJ будет «большей», так что и квадрирующая AD будет «большей».

Но вот пусть AB будет меньше CD; и значит, EH будет меньше GJ (черт. 81); так что и ⟨прямая⟩ EG будет меньше GK (предложение 1 книги VI; предложение 14 книги V). В квадратах же GK будет больше EG или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или же на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой. Пусть сперва в квадратах она будет больше на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно; и меньшая EG будет линейно соизмерима с отложенной рациональной EI; значит, EK будет второй биномиалью (определения вторые, 2). Но EI рациональна; если же площадь заключается между рациональной и второй биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет первой бимедиалью (предложение 55). Значит, квадрирующая площадь EJ будет первой бимедиалью; так что и квадрирующая AD будет первой бимедиалью. Но вот пусть GK в квадратах будет больше GE на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой. И меньшая EG будет соизмерима с отложенной рациональной EI; значит, EK будет пятой биномиалью (определения вторые, 5). Но EI рациональна; если же площадь заключается между рациональной и пятой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет рационально и медиально квадрирующей (предложение 58). Значит, квадрирующая площадь EJ будет рационально и медиально квадрирующей; так что и квадрирующая площадь AD будет рационально и медиально квадрирующей.



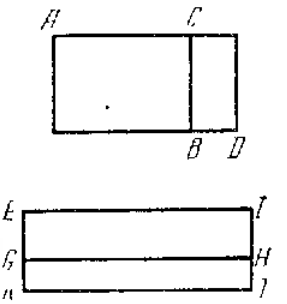
Черт. 81.

Итак, при соединении рационального и медиального возникают четыре иррациональных — или биномиаль, или первая бимедиаль, или «бо́льшая» ⟨иррациональная⟩, или рационально и медиально квадрирующая, что и требовалось доказать.

Предложение 72

При соединении двух несоизмеримых между собой медиальных возникают остальные две иррациональные — или вторая бимедиаль, или бимедиально квадрирующая.

Соединим две медиальных несоизмеримых между собой ⟨площади⟩ AB, CD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AD будет или второй бимедиалью, или бимедиально квадрирующей (черт. 82).



Черт. 82.

Действительно, AB будет или больше или меньше CD. Пусть, если случится, сначала AB будет больше CD; и отложим рациональную EI, и приложим к EI равную AB ⟨площадь⟩ EH, образующую ширину EG, а также равную CD ⟨площадь⟩ GJ, образующую ширину GK. И поскольку каждая из AB, CD будет медиальной, медиальна, значит, и каждая из EH, GJ. И они прилагаются к рациональной IE, образуя ширины EG, GK; значит, каждая из EG, GK будет рациональной и несоизмеримой с EI линейно (предложение 22). И поскольку ⟨площадь⟩ AB несоизмерима с CD, и будут AB равна EH, CD же GJ, то несоизмерима, значит, будет и ⟨площадь⟩ EH с GJ. Как же EH к GJ, так будет и ⟨прямая⟩ EG к GK (предложение 1 книги VI); значит, EG будет несоизмерима с GK линейно (предложение 11). Значит, EG, GK будут рациональными, соизмеримыми только в степени прямыми; значит, EK будет биномиалью (предложение 36). В квадратах же EG будет больше GK или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой. Пусть сначала в квадратах ⟨она будет больше⟩ на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно; и никакая из EG, GK не будет линейно соизмерима с отложенной рацио-

нальной EI; значит, EK будет третьей биномиалью (определения вторые, 3). Но EI рациональна; если же площадь заключается между рациональной и третьей биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет второй бимедиалью (предложение 56); значит, квадрирующая ⟨площадь⟩ EJ, то-есть AD, будет второй бимедиалью. Но вот пусть EG будет в квадратах больше GK на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно; и каждая из EG, GK будет несоизмерима с EI линейно; значит, EK будет шестой биномиалью (определения вторые, 6). Если же площадь заключается между рациональной и шестой биномиалью, то квадрирующая эту площадь будет бимедиально квадрирующей (предложение 59), так что и квадрирующая площадь AD будет бимедиально квадрирующей.

[Подобным же вот образом докажем, что и если AB будет меньше CD, то квадрирующая площадь AD будет или вторая бимедиаль или бимедиально квадрирующая.]

Итак, при соединении двух несоизмеримых между собой медиальных возникают остальные две иррациональные — или вторая бимедиаль, или бимедиально квадрирующая.

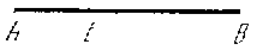
Биномиаль и ⟨получающиеся⟩ после неё иррациональные не будут тождественными ни с медиалью, ни друг с другом. Действительно, ⟨квадрат⟩ на медиали, приложенный к рациональной, образует ширину рациональную и линейно несоизмеримую с той, к которой прилагается (предложение 22). ⟨Квадрат⟩ же на биномиали, приложенный к рациональной, образует шириной первую биномиаль (предложение 60). ⟨Квадрат⟩ же на первой бимедиали, приложенный к рациональной, образует шириной вторую биномиаль (предложение 61). ⟨Квадрат⟩ же на второй бимедиали, приложенный к рациональной, образует шириной третью биномиаль (предложение 62). ⟨Квадрат⟩ же на «большей» ⟨иррациональной⟩, приложенный к рациональной, образует шириной четвёртую биномиаль (предложение 63). ⟨Квадрат⟩ же на рационально и медиально квадрирующей, приложенный к рациональной, образует шириной пятую биномиаль (предложение 64). ⟨Квадрат⟩ же на бимедиально квадрирующей, при-

ложенный к рациональной, образует шириной шестую биномиаль (предложение 65). Вышеупомянутые же ширины отличаются от первой и между собой, от первой — потому что она рациональна, между собой же — потому что по ранту они не будут теми же самыми; так что и сами эти иррациональные различаются между собой (51, 52, 53, 54, 55).

Предложение 73

Если от рациональной отнимается рациональная, только в степени соизмеримая с целой, то остающаяся будет иррациональной; пусть называется она вычетом)* (56).

Пусть от рациональной AB отнимается рациональная BC, только в степени соизмеримая с целой; я утверждаю, что остающаяся AC будет иррациональной — так называемым вычетом (черт. 83).



Черт. 83.

Действительно, поскольку AB линейно несоизмерима с BC и как AB к BC, так и ⟨квадрат⟩ на AB к ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC (предложение 21, лемма), то значит, ⟨квадрат⟩ на AB будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AB соизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC (предложение 15), с ⟨прямоугольником⟩ же между AB, BC соизмерим будет дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC (предложение 6). И поскольку ⟨квадраты⟩ на AB, BC равны дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC вместе с ⟨квадратом⟩ на CA, то значит, ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC будут несоизмеримы и с остатком — ⟨квадратом⟩ на AC (предложения 13, 16). ⟨Квадраты⟩ же на AB, BC рациональны; значит, AC будет иррациональной; пусть называется она *вычетом*; что и требовалось доказать.

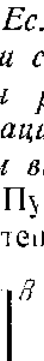
---

*) Другое название: апотома (ἡ ἀποτομή).

Предложение 74

Если от медиали отнимается медиаль, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая рациональную ⟨площадь⟩, то остающаяся будет иррациональной; пусть называется она первым медиальным вычетом.

Пусть от медиали AB отнимается медиаль BC, только в степени соизмеримая с AB, образующая же вместе с AB рациональную ⟨площадь — прямоугольник⟩ между AB, BC; я утверждаю, что остающаяся AC будет иррациональной; пусть называется она первым медиальным вычетом (черт. 84).



Черт. 84.

Действительно, поскольку AB, BC — медиали, то и ⟨квадраты⟩ на AB, BC будут медиальными. Дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рационален; значит, ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC; значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC (предложение 7 книги II) будет несоизмерим и с остающимся ⟨квадратом⟩ на AC, поскольку если и целое с одной из них несоизмеримо, то и первоначальные величины будут несоизмеримыми (предложение 16). Дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рационален; значит, ⟨квадрат⟩ на AC иррационален; иррациональна, значит, и AC (определение 4); пусть она называется *первым медиальным вычетом*.

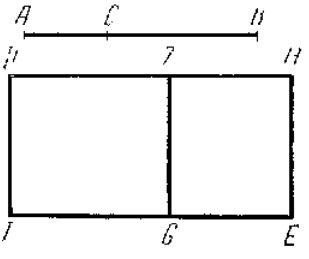
Предложение 75

Если от медиали отнимается медиаль, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая медиальную ⟨площадь⟩, то остающаяся будет иррациональной; пусть она называется вторым медиальным вычетом.

Пусть от медиали AB отнимается медиаль CB, только в степени соизмеримая с целой AB, вместе же с целой AB заключающая медиальную ⟨площадь — прямоугольник⟩ между AB, BC (предложение 28): я утверждаю, что остаю-

щаяся AC будет иррациональной; пусть она называется вторым медиальным вычетом (черт. 85).

Действительно, отложим рациональную ⟨прямую⟩ DI и приложим к DI равную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AB, BC ⟨площадь⟩ DE, образующую ширину DH, к DI же приложим равную дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC ⟨площадь⟩ DG, образующую ширину DZ; значит, остаток ⟨площадь⟩ ZE равен будет ⟨квадрату⟩ на AC (предложение 7 книги II). И поскольку ⟨квадраты⟩ на AB, BC медиальны и соизмеримы, то значит, медиальна и ⟨площадь⟩ DE. И прилагается она к рациональной DI, образуя ширину DH; значит, DH будет рациональной и несоизмеримой с DI линейно (предложение 22). Затем, поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC медиален, то значит, и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC будет медиальным (предложение 23, следствие). И он равен DG; значит, и DG будет медиальным. И он приложен к рациональной DI, образуя ширину DZ; значит DZ будет рациональной и несоизмеримой с DI линейно (предложение 22). И поскольку AB, BC соизмеримы только в степени, то значит, AB будет несоизмеримой линейно с BC; значит, и квадрат на AB несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 21, лемма; предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AB соизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC (предложение 15), с ⟨прямоугольником⟩ же между AB, BC соизмерим дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC (предложение 6); значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC будет несоизмерим с ⟨вместе взятыми квадратами⟩ на AB, BC (предложение 13). ⟨Квадратам⟩ же на AB, BC равна ⟨площадь⟩ DE, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC — ⟨площадь⟩ DG; значит, DE [будет] несоизмерима с DG. Как же DE к DG, так и HD к DZ (предложение 1 книги VI); значит, HD будет несоизмерима с DZ (предложение 11). И обе они будут рациональными; значит, HD, DZ будут рациональными, соизмери-

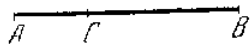


Черт. 85.

мыми только в степени: значит, ZH будет вычетом (предложение 73). ⟨Прямая⟩ же DI рациональна; ⟨площадь⟩ же, заключающаяся между рациональной и иррациональной, будет иррациональной (предложение 20), и квадрирующая её будет иррациональна. И ⟨площадь⟩ ZE квадрируется ⟨прямой⟩ AC; значит, AC будет иррациональна (определение 4); пусть она называется *вторым медиальным вычетом*; что и требовалось доказать.

Предложение 76

Если от прямой отнимается прямая, несоизмеримая в степени с целой, образующая же с целой ⟨квадраты⟩ на них вместе ⟨взятые⟩ рациональные, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальный, то остающаяся будет иррациональной; пусть она называется «меньшей» ⟨иррациональной⟩.



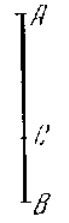
Черт. 86.

Пусть от прямой AB отнимается прямая BC, несоизмеримая в степени с целой и образующая предложенное (предложение 33). Я утверждаю, что остающаяся AC будет иррациональной так называемой «меньшей» (черт. 86).

Действительно, поскольку составленное из квадратов на AB, BC будет рациональным, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC медиальным, то значит, ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC будут несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC; и, «переворачивая», с остатком (предложение 7 книги II) ⟨квадратом⟩ на AC – будут несоизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC (предложение 16). ⟨Квадраты⟩ же на AB, BC рациональны; значит, AC будет иррациональна; пусть она называется *«меньшей»*; что и требовалось доказать.

Предложение 77

Если от прямой отнимается прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая составленное из квадратов на них медиальное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними рациональный, то остающаяся будет иррациональной; пусть она называется образующей с рациональным целое медиальное.



Черт. 87.

Пусть от прямой AB отнимается прямая BC, несоизмеримая в степени с AB и образующая предложенное (предложение 34); я утверждаю, что остающаяся AC будет вышеупомянутой иррациональной (черт. 87).

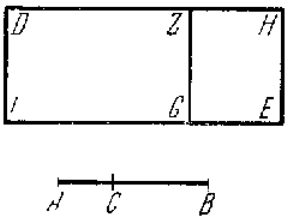
Действительно, поскольку составленное из квадратов на AB, BC медиально, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рациональный, то значит, ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC будут несоизмеримыми с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC; значит, и остающийся (предложение 7 книги II) ⟨квадрат⟩ на AC будет несоизмерим с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (предложение 16). И дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC рационален; значит, ⟨квадрат⟩ на AC иррационален; иррациональна, значит, и AC; пусть она называется *образующей с рациональным целое медиальное*; что и требовалось доказать.

Предложение 78

Если от прямой отнимается прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая составленное из квадратов на них медиальное, дважды же прямоугольник между ними медиальный и ещё квадраты на них, несоизмеримые с дважды прямоугольником между ними, то остающаяся будет иррациональной; пусть она называется образующей с медиальным целое медиальное.

Пусть от прямой AB отнимается прямая BC, несоизмеримая в степени с AB и образующая предложенное; я утверждаю, что остающаяся AC будет иррациональной, называемой образующей с медиальным целое медиальное (черт. 88).

Действительно, отложим рациональную DI и приложим к DI разную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AB, BC ⟨площадь⟩ DE, образующую ширину DH, отнимем же ⟨площадь⟩ DG, равную дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC [образующую ширину DZ]. Значит, остающаяся ⟨площадь⟩ ZE будет равна квадрату на AC (предложение 7 книги II); так что AC квадрирует ⟨площадь⟩ ZE. И поскольку составленное из квадратов на AB, BC медиально и равно ⟨площади⟩ DE, то значит, и DE [будет] медиальна. И она прилагается к рациональной DI, образуя ширину DH; значит, DH будет рациональной и несоизмеримой с DI линейно (предложение 22). Затем, поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC медиален и равен ⟨площади⟩ DG, то значит, DG будет медиальна. И прилагается она к рациональной DI, образуя ширину DZ; значит, и DZ будет рациональной и несоизмеримой с DI линейно (предложение 22). И поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AB, BC несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC, то значит, и ⟨площадь⟩ DE несоизмерима с DG. Как же DE к DG, так будет и ⟨прямая⟩ DH к DZ (предложение 1 книги VI); значит, DH будет несоизмерима с DZ (предложение 11). И обе они рациональны; значит, HD, DZ будут рациональными, соизмеримыми только в степени. Значит, ZH будет вычетом (предложение 73); ZG же рациональна. [Прямоугольная] же ⟨площадь⟩, заключающаяся между рациональной и вычетом, будет иррациональной (предложение 20), и квадрирующая её будет иррациональной. И ⟨площадь⟩ ZE квадрируется ⟨прямой⟩ AC; значит, AC будет иррациональна; пусть она называется *образующей с медиальным целое медиальное*; что и требовалось доказать.



Черт 88.

Предложение 79

С вычетом сочетается) одна [только] рациональная прямая, только в степени соизмеримая с целой.*

*) В подлиннике προσαρμόζει — прилаживается.

Пусть вычет будет AB, сочетающаяся же с ним ⟨прямая⟩ BC; значит, AC, CB будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73); я утверждаю, что с AB не сочетается другая рациональная ⟨прямая⟩, только в степени соизмеримая с целой (черт. 89).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться BD; и AD, DB, значит, будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73). И поскольку, чем ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB превышают дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB, тем и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB превышают дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, ибо оба они превышают одним и тем же ⟨квадратом⟩ на AB (предложение 7 книги II); значит, «перестановкой», чем ⟨квадраты⟩ на AD, DB превышают ⟨квадраты⟩ на AC, CB, тем [и] дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB. ⟨Квадраты⟩ же на AD, DB рациональным превышают ⟨квадраты⟩ на AC, CB, ибо оба рациональны. Значит, и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB; это же невозможно; ибо оба они медиальны (предложение 21), медиальное же медиальное не превышает рациональным (предложение 26). Значит, с AB не сочетается другая рациональная прямая, только в степени соизмеримая с целой.

Черт. 89.

Итак, с вычетом сочетается только одна рациональная ⟨прямая⟩, только в степени соизмеримая с целой, что и требовалось доказать.

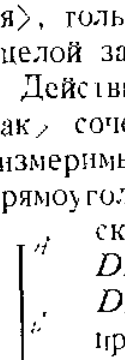
Предложение 80

С первым медиальным вычетом сочетается только одна медиальная прямая, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая рациональную ⟨площадь⟩.

Пусть первый медиальный вычет будет AB и пусть с AB будет сочетаться BC; значит, AC, CB будут медиали, соизмеримые только в степени, заключающие рациональный

⟨прямоугольник⟩ между AC, CB (предложение 74); я утверждаю, что с AB не сочетается другая медиальная ⟨прямая⟩, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая рациональную ⟨площадь⟩ (черт. 90).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться и DB; значит, AD, DB будут медиали, соизмеримые только в степени, заключающие рациональный ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB (предложение 74). И поскольку, чем ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB превышают дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB, тем и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB превышают дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, ибо [опять] они превосходят тем же самым ⟨квадратом⟩ на AB (предложение 7 книги II); значит, «перестановкой», чем ⟨квадраты⟩ на AD, DB превышают ⟨квадраты⟩ на AC, CB, тем и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB. Дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, ибо оба рациональны. Значит, и ⟨квадраты⟩ на AD, DB рациональным превышают [квадраты] на AC, CB; это же невозможно, ибо оба медиальны (предложение 24); медиальное же медиальное не превышает рациональным (предложение 26).



Черт. 90.

Итак, с первым медиальным вычетом сочетается только одна медиальная прямая, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая рациональную ⟨площадь⟩, что и требовалось доказать.

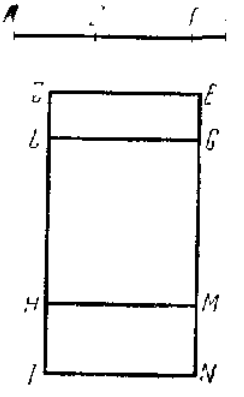
Предложение 81

Со вторым медиальным вычетом сочетается только одна медиальная прямая, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая медиальную ⟨площадь⟩.

Пусть будут второй медиальный вычет AB и сочетающаяся с AB ⟨прямая⟩ BC; значит, AC, CB будут медиали, соизмеримые только в степени, заключающие медиальный ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB (предложение 75); я ут-

верждаю, что с AB не сочетается другая медиальная прямая, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая медиальную ⟨площадь⟩ (черт. 91).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться BD; и, значит, AD, DB будут медиальными, соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩, заключающими медиальный ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB (предложение 73). И отложим рациональную EZ, и приложим к EZ равную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AC, CB ⟨площадь⟩ EH, образующую ширину EM; отнимем же равную дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB ⟨площадь⟩ GH, образующую ширину GM; значит, остаток EL будет равен ⟨квадрату⟩ на AB (предложение 7 книги II), так что AB квадрирует ⟨площадь⟩ EL. Затем вот приложим к EZ равную ⟨квадратам⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ EI, образующую ширину EN; также и ⟨площадь⟩ EL будет равна квадрату на AB; значит, остаток GI будет равен дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AD, DB (предложение 7 книги II). И поскольку ⟨прямые⟩ AC, CB медиальны, то значит, медиальными будут и ⟨квадраты⟩ на AC, CB. И равны они ⟨площади⟩ EH; значит, медиальной будет и EH. И прилагается она к рациональной EZ, образуя ширину EM; значит, EM будет рациональной и несоизмеримой с EZ линейно (предложение 22). Затем, поскольку медиален ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, то и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB будет медиальным (предложение 23, следствие). И равен он ⟨площади⟩ GH; значит, и GH будет медиальным. И прилагается он к рациональной EZ, образуя ширину GM; значит, рациональной будет и GM и несоизмеримой с EZ линейно (предложение 22). И поскольку AC, CB соизмеримы только в степени, то значит, AC будет несоизмеримой с CB линейно. Как же AC к CB, так будет и ⟨квадрат⟩ на AC к ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB (предложение 21, следствие); значит, ⟨квадрат⟩



Черт. 91.

на AC несоизмерим будет с ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB (предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AC соизмеримы ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB, с ⟨прямоугольником⟩ же между AC, CB соизмерим дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB; значит, и ⟨квадраты⟩ на AC, CB будут несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB (предложение 13). И ⟨квадратам⟩ на AC, CB равна ⟨площадь⟩ EH, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB равна ⟨площадь⟩ HG; значит, EH несоизмерима с GH. Как же EH к GH, так будет и ⟨прямая⟩ EM к GM (предложение 1 книги VI); значит, EM будет несоизмерима с MG линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, EM, MG будут рациональными соизмеримыми только в степени ⟨прямыми⟩; значит, EG будет вычетом (предложение 73), GM же — сочетающейся с ним ⟨прямой⟩. Подобным же вот образом докажем, что с ним сочетается и GN; значит, с вычетом сочетаются одна и другая прямая, только в степени соизмеримые с целой; это же невозможно (предложение 79).

Итак, со вторым медиальным вычетом сочетается только одна медиальная прямая, только в степени соизмеримая с целой, вместе же с целой заключающая медиальную ⟨площадь⟩, что и требовалось доказать.

Предложение 82

С «меньшей» ⟨иррациональной⟩ сочетается только одна прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая ⟨составленное⟩ из квадратов на них рациональное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный.

Пусть будет «меньшая» ⟨иррациональная⟩ AB и пусть сочетающаяся с AB будет BC; значит, AC, CB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них рациональное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный (предложение 76); я утверждаю, что с AB не сочетается другая прямая, образующая то же самое (черт. 92).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться BD; и значит, AD, BD будут несоизмеримые в степени ⟨прямые⟩, образующие вышесказанное. И поскольку, чем ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB превышают ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB, тем и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB превышает

Черт. 92.

дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, квадраты же на AD, DB рациональным превышают квадраты на AC, CB, ибо оба рациональны; значит, и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB; это же невозможно (предложение 26), ибо оба медиальны.

Итак, с «меньшей» сочетается только одна прямая, несоизмеримая в степени с целой и образующая квадраты на них вместе рациональными, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, что и требовалось доказать.

Предложение 83

С ⟨прямой⟩, образующей с рациональным целое медиальное, сочетается только одна прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая составленное из квадратов на них медиальное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними рациональный.

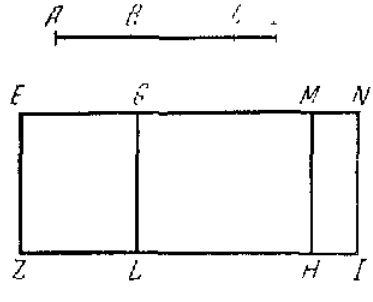
Черт. 93.

Пусть образующая с рациональным целое медиальное будет AB и пусть с AB будет сочетаться BC; значит, AC, CB будут несоизмеримые в степени ⟨прямые⟩, образующие предложенное (предложение 77); я утверждаю, что с AB не сочетается другая ⟨прямая⟩, образующая то же самое (черт. 93).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться BD; и значит, AD, DB будут прямые, несоизмеримые в степени, образующие предложенное (предложение 77). Поскольку теперь, чем ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB превышают ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB, тем и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, в соответствии с тем, что выше; дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB рациональным превышает дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB, ибо оба они рациональны; и значит, ⟨квадраты⟩ на AD, DB рациональным превышают ⟨квадраты⟩ на AC, CB; это же невозможно, ибо оба они медиальны (предложение 26). Значит, с AB не сочетается другая прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая вышесказанное; значит, только одна сочетается, что и требовалось доказать.

Предложение 84

С ⟨прямой⟩, образующей с медиальным целое медиальное, сочетается только одна прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая составленное из квадратов на них медиальное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный и ещё несоизмеримый с составленным из ⟨квадратов⟩ на них.



Черт. 94.

Пусть образующая с медиальным целое медиальное будет AB, сочетающаяся же с ней BC; значит, AC, CB будут несоизмеримыми в степени, образующими вышесказанное (предложение 78). Я утверждаю, что с AB не сочетается другая прямая, образующая вышесказанное (черт. 94).

Действительно, пусть, если возможно, ⟨с ней⟩ будет ⟨так⟩ сочетаться BD, так что AD, DB будут несоизмеримыми в степени, образующими квадраты на AD, DB вместе

медиальные и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB медиальный и ещё ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AD, DB, несоизмеримые с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AD, DB (предложение 78); и отложим рациональную EZ и приложим к EZ равную ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AC, CB ⟨площадь⟩ EH, образующую ширину EM, к EZ же приложим равную дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AC, CB ⟨площадь⟩ GH, образующую ширину GM; значит, остаток — ⟨квадрат⟩ на AB (предложение 7 книги II) — будет равен ⟨площади⟩ EL; значит, AB квадрирует EL. Затем, приложим к EZ равную ⟨квадратам⟩ на AD, DB ⟨площадь⟩ EI, образующую ширину EN. Также и ⟨квадрат⟩ на AB равен EL; значит, остаток (предложение 7 книги II) — дважды ⟨прямоугольник⟩ между AD, DB — равен [будет] ⟨площади⟩ GI. И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на AC, CB медиально и равно ⟨площади⟩ EH, то медиальной, значит, будет и EH. И прилагается она к рациональной EZ, образуя ширину EM; значит, EM будет рациональна и несоизмерима с EZ линейно (предложение 22). Затем, поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между AC, CB медиален и равен ⟨площади⟩ GH, то медиальна, значит, и GH. И прилагается она к рациональной EZ, образуя ширину GM; значит, GM будет рациональна и несоизмерима с EZ линейно (предложение 22). И поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AC, CB несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AC, CB, то и ⟨площадь⟩ EH несоизмерима будет с GH; значит, и ⟨прямая⟩ EM будет линейно несоизмерима с MG (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И обе они рациональны; значит, EM, MG будут рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩; значит, EG будет вычетом (предложение 73), GM же — сочетающейся с ним ⟨прямой⟩. Подобным же вот образом докажем, что EG опять будет вычетом, GN же — с ним сочетающейся. Значит, с вычетом сочетаются одна и другая рациональные ⟨прямые⟩, только в степени соизмеримые с целой; это же по доказанному невозможно (предложение 79). Значит, с AB не сочетается другая прямая.

Итак, с AB сочетается только одна прямая, несоизмеримая в степени с целой, вместе же с целой образующая

квадраты на них вместе медиальные и дважды ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный и ещё квадраты на них, несоизмеримые с дважды ⟨прямоугольником⟩ между ними, что и требовалось доказать.

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРЕТЬИ

1. Если при отложении рациональной ⟨прямой⟩ и вычета целая в квадратах будет больше сочетающейся на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно и целая будет линейно соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, то пусть ⟨вычет⟩ называется *первым вычетом*.

2. Если же сочетающаяся будет линейно соизмерима с отложенной прямой и целая в квадратах будет больше сочетающейся на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то пусть ⟨вычет⟩ называется *вторым вычетом*.

3. Если же никакая не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной и целая в квадратах будет больше сочетающейся на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то пусть ⟨вычет⟩ называется *третьим вычетом*.

4. Опять, если целая в квадратах будет больше сочетающейся на квадрат на несоизмеримой с собой [линейно], то если целая будет линейно соизмерима с отложенной рациональной, пусть ⟨вычет⟩ называется *четвёртым вычетом*.

5. Если же ⟨соизмерима будет⟩ сочетающаяся, то — *пятым*.

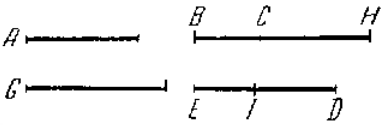
6. Если же никакая ⟨не будет соизмерима⟩, то — *шестым* (57).

Предложение 85

Найти первый вычет (черт. 95).

Отложим рациональную ⟨прямую⟩ A и пусть BH будет соизмерима с A линейно; рациональной, значит, будет и BH. И отложим два квадратных числа DE, EI, разность ID которых пусть не будет квадратом (предложение 28, лемма); значит, и ED не будет иметь к DI отношения, как квадратное число к квадратному числу. И сделаем, чтобы как ED к DI, так ⟨был бы и⟩ квадрат на BH к квадрату

на HC (предложение 6, следствие); значит, квадрат на BH соизмерим будет с квадратом на HC (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на BH рационален; риционален, значит, и ⟨квадрат⟩ на HC; рациональной, значит, будет и HC. И поскольку ED не имеет к DI отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на HC не имеет отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, BH будет несоизмерима с HC линейно. И обе они рациональны; значит, BH, HC будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, BC будет вычетом (предложение 73).



Черт. 95.

Вот я утверждаю, что и первым.

Действительно, пусть то, чем ⟨квадрат⟩ на BH больше ⟨квадрата⟩ на HC (предложение 13, лемма), будет квадрат на G. И поскольку будет, что как ED к ID, так и ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на HC, то значит, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), будет, что как DE к EI, так и ⟨квадрат⟩ на HB к ⟨квадрату⟩ на G. Но DE имеет к EI отношение, как квадратное число к квадратному числу, ибо каждое из них квадрат; и значит, ⟨квадрат⟩ на HB к ⟨квадрату⟩ на G имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит, BH будет соизмерима с G линейно (предложение 9). И BH в квадратах больше HC на ⟨квадрат⟩ на G; значит, BH в квадратах больше HC на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно. И целая BH будет линейно соизмерима с отложенной рациональной A. Значит, BC будет первым вычетом (определения третьи, 1).

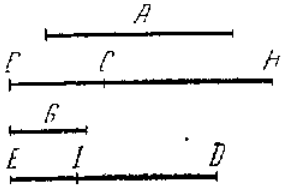
Итак, найден первый вычет BC, что и требовалось найти.

Предложение 86

Найти второй вычет (черт. 96).

Отложим рациональную A и соизмеримую с A линейно HC. Значит, HC будет рациональной. И отложим два

квадратных числа DE, EI, разность DI которых пусть квадратом не будет (предложение 78, лемма 1). И сделаем, чтобы как ID к DE, так ⟨был бы и⟩ квадрат на CH к квадрату на HB (предложение 6, следствие). Значит, квадрат на CH будет соизмерим с квадратом на HB (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на CH рационален. Рациональным, значит, [будет] и ⟨квадрат⟩ на HB; значит, BH будет рациональна. И поскольку квадрат на HC не имеет к ⟨квадрату⟩ на HB отношения, как квадратное число к квадратному числу, то CH будет несоизмерима с HB линейно (предложение 9). И обе они рациональны; значит, CH, HB будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, BC будет вычетом (предложение 73).



Черт. 96.

Вот я утверждаю, что и вторым.

Действительно, пусть то, чем ⟨квадрат⟩ на BH больше ⟨квадрата⟩ на HC, будет ⟨квадрат⟩ на G (предложение 13, лемма). Поскольку теперь будет, что как ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на HC, так и число ED к числу DI, то, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), будет, значит, что как ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на G, так и DE к EI. И каждое из DE, EI квадрат; значит, ⟨квадрат⟩ на BH имеет к ⟨квадрату⟩ на G отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит, BH будет линейно соизмерима с G (предложение 9). И в квадратах BH более HC на ⟨квадрат⟩ на G; значит, BH в квадратах более HC на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно. И сочетающаяся CH будет соизмерима с отложенной рациональной A. Значит, BC будет вторым вычетом (определения третьи, 2).

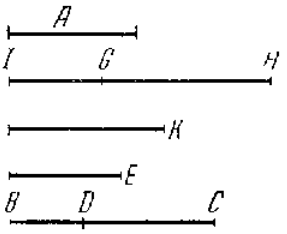
Итак, найден второй вычет BC, что и требовалось доказать.

Предложение 87

Найти третий вычет (черт. 97).

Отложим рациональную A и отложим три числа E, BC, CD, не имеющие между собой отношения, как квадратное

число к квадратному числу; пусть же CB будет иметь к BD отношение, как квадратное число к квадратному числу, и сделаем, чтобы как E к BC, так ⟨был бы и⟩ квадрат на A к квадрату на IH (предложение 28, лемма 1), как же BC к CD, так ⟨был бы и⟩ квадрат на IH к квадрату на HG. Поскольку теперь будет, что как E к BC, так и квадрат на A к квадрату на IH, то значит, соизмеримым будет квадрат на A с квадратом на IH (предложение 6). Квадрат же на A рационален. Рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на IH; значит, IH будет рациональна. И поскольку E не имеет к BC отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и квадрат на A не имеет к [квадрату] на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, A будет линейно несоизмерима с IH (предложение 9). Затем, поскольку будет, что как BC к CD, так и квадрат на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то значит, ⟨квадрат⟩ на IH будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на HG (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на IH рационален; рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на HG; рациональной, значит, будет и HG. И поскольку BC не имеет к CD отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на IH не имеет к ⟨квадрату⟩ на HG отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, IH будет линейно несоизмерима с HG (предложение 9). И обе они рациональны; значит, IH, HG будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, IG будет вычетом (предложение 73).



Черт. 97.

Вот я утверждаю, что и третьим.

Действительно, поскольку будет, что как E к BC, так и квадрат на A к ⟨квадрату⟩ на IH, как же BC к CD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на GH, то «по равенству» (предложение 22 книги V), значит, будет, что как E к CD, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на GH. Но E не имеет к CD отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на A не имеет к ⟨квадрату⟩ на HG отношения, как квадратное число к квадрат-

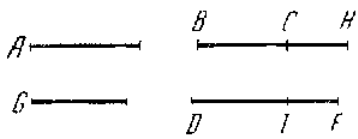
ному числу; значит, A несоизмерима будет с HG линейно (предложение 9). Значит, никакая из IH, HG не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной A. Пусть теперь то, чем ⟨квадрат⟩ на IH больше ⟨квадрата⟩ на HG, будет ⟨квадрат⟩ на K (предложение 13, лемма). Поскольку теперь будет, что как BC к CD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), значит, будет, что как BC к BD, так и квадрат на IH к ⟨квадрату⟩ на K. Но BC имеет к BD отношение, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на K имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу. Значит, IH будет линейно соизмерима с K (предложение 9), и в квадратах IH более HG на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой ⟨прямой⟩. И никакая из IH, HG не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной A; значит, IG будет третьим вычетом (определения третьи, 3).

Итак, найден третий вычет IG, что и требовалось доказать.

Предложение 88

Найти четвёртый вычет (черт. 98).

Отложим рациональную A и соизмеримую с A линейно BH; рациональной, значит, будет и BH. И отложим два числа DI, IE так, чтобы вся DE не имела к каждой из DI, EI отношения, как квадратное число к квадратному числу. И сделаем, чтобы как DE к EI, так ⟨был бы и⟩ квадрат на BH к ⟨квадрату⟩ на HC (предложение 6, следствие); значит, ⟨квадрат⟩ на BH будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на HC (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на BH рационален; рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на HC; рациональна, значит, и HC. И поскольку DE не имеет к EI отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на BH не имеет к ⟨квадрату⟩ на HC отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, BH будет линейно несоизмерима с HC (предложе-



Черт. 98.

ние 9). И обе они рациональны; значит, *BH*, *HC* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *BC* будет вычетом (предложение 73).

[Вот я утверждаю, что и четвёртым].

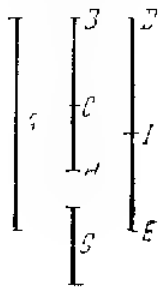
Пусть теперь то, чем ⟨квадрат⟩ на *BH* больше ⟨квадрата⟩ на *HC*, будет ⟨квадрат⟩ на *G* (предложение 13, лемма). Поскольку теперь будет, что как *DE* к *EI*, так и ⟨квадрат⟩ на *BH* к ⟨квадрату⟩ на *HC*, то значит, и «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), будет, что как *ED* к *DI*, так и ⟨квадрат⟩ на *HB* к ⟨квадрату⟩ на *G*. Но *ED* не имеет к *DI* отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на *HB* не имеет к ⟨квадрату⟩ на *G* отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, *BH* несоизмерима будет с *G* линейно (предложение 9). И в квадратах *BH* более *HC* на ⟨квадрат⟩ на *G*; значит, *BH* в квадратах более *HC* на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой. И вся *BH* соизмерима линейно с отложенной рациональной *A*. Значит, *BC* будет четвёртым вычетом (определения третьи, 4).

Итак, найден четвёртый вычет, что и требовалось доказать.

Предложение 89

Найти пятый вычет (черт. 99).

Отложим рациональную *A*, и пусть *CH* будет линейно соизмерима с *A*; значит, *CH* [будет] рациональна. И отложим два числа *DI*, *IE* так, чтобы *DE* опять не имела к каждой из *DI*, *IE* отношения, как квадратное число к квадратному числу; и сделаем, чтобы как *IE* к *ED*, так ⟨был бы и квадрат⟩ на *CH* к ⟨квадрату⟩ на *HB*. Рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на *HB* (предложение 6); рациональна, значит, будет и *BH*. И поскольку будет, что как *DE* к *EI*, так и ⟨квадрат⟩ на *BH* к ⟨квадрату⟩ на *HC*, *DE* же не имеет к *EI* отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на *BH* не имеет к ⟨квадрату⟩ на *HC* отношения, как квадратное число к квадратному



Черт. 99.

числу; значит, BH несоизмерима будет с HC линейно (предложение 9). И обе они рациональны; значит, BH, HC будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, BC будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и пятым.

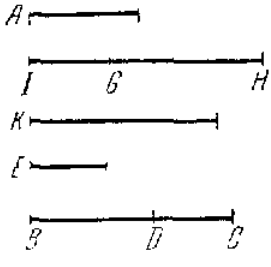
Пусть, действительно, то, чем ⟨квадрат⟩ на BH более ⟨квадрата⟩ на HC, будет ⟨квадрат⟩ на G (предложение 13, лемма). Поскольку теперь будет, что как ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на HC, так и DE к EI, то, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), значит, будет, что как ED к DI, так и ⟨квадрат⟩ на BH к ⟨квадрату⟩ на G. Но ED не имеет к DI отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на BH не имеет к ⟨квадрату⟩ на G отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, BH несоизмерима будет с G линейно (предложение 9). И в квадратах BH более HC на ⟨квадрат⟩ на G; значит, HB в квадратах более HC на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно. И сочетающаяся CH будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной A; значит, BC будет пятым вычетом (определения третьи, 5).

Итак, найден пятый вычет BC, что и требовалось доказать.

Предложение 90

Найти шестой вычет (черт. 100).

Отложим рациональную A и три числа E, BC, CD, не имеющие между собой отношения, как квадратное число к квадратному числу; ещё же пусть и CB не будет иметь к BD отношения, как квадратное число к квадратному числу; и сделаем, чтобы как E к BC, так ⟨был бы и квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на IH, как же BC к CD, так ⟨был бы и квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG.



Черт. 100.

Поскольку теперь будет, что как E к BC, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на IH, то значит, ⟨квадрат⟩ на A соизмерим с ⟨квадратом⟩ на IH (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же

на A рационален; рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на IH; рациональной, значит, будет и IH. И поскольку E не имеет к BC отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на A не будет иметь к ⟨квадрату⟩ на IH отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, A будет несоизмерима с IH линейно (предложение 9). Затем, поскольку будет, что как BC к CD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то значит, ⟨квадрат⟩ на IH соизмерим с ⟨квадратом⟩ на HG (предложение 6). ⟨Квадрат⟩ же на IH рационален; рационален, значит, и ⟨квадрат⟩ на HG; рациональна, значит, и HG. И поскольку BC не имеет к CD отношения, как квадратное число к квадратному числу, то значит, и ⟨квадрат⟩ на IH не имеет к ⟨квадрату⟩ на HG отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, IH будет несоизмерима с HG линейно (предложение 9). И обе они рациональны; значит, IH, HG будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, IG будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и шестым.

Действительно, поскольку будет, что как E к BC, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на IH, как же BC к CD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то значит, «по равенству» (предложение 22 книги V) будет, что как E к CD, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на HG. Но E не имеет к CD отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на A не будет иметь к ⟨квадрату⟩ на HG отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, A будет линейно несоизмерима с HG (предложение 9); значит, никакая из IH, HG не будет линейно соизмерима с рациональной A. Пусть теперь то, чем ⟨квадрат⟩ на IH больше ⟨квадрата⟩ на HG, будет ⟨квадрат⟩ на K (предложение 13, лемма). Поскольку теперь будет, что как BC к CD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на HG, то, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), значит, будет, что как CB к BD, так и ⟨квадрат⟩ на IH к ⟨квадрату⟩ на K. Но CB не имеет к BD отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, и ⟨квадрат⟩ на IH не имеет к ⟨квадрату⟩ на K

отношения, как квадратное число к квадратному числу; значит, IH будет несоизмерима с K линейно (предложение 9). И в квадратах IH более HG на ⟨квадрат⟩ на K; значит, IH в квадратах более HG на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно. И никакая из IH, HG не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной A. Значит, IG будет шестым вычетом (определения третьи, 6).

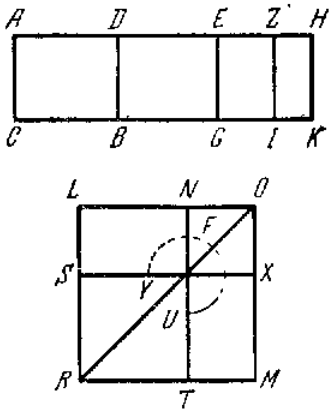
Итак, найден шестой вычет IG, что и требовалось доказать (58).

Предложение 91

Если площадь заключается между рациональной и первым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет вычетом.

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и первым вычетом AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет вычетом (черт. 101).

Действительно, поскольку AD есть первый вычет, то пусть сочетающаяся с ним будет DH; значит, AH, HD будут рациональные, соизмеримые только в степени ⟨прямые⟩ (предложение 73). И вся AH соизмерима с отложенной рациональной AC, и в квадратах AH более HD на ⟨квадрат⟩ на линейно соизмеримой с собой (определения третьи, 1); значит, если приложить к AH с недостатком в виде квадрата ⟨площадь⟩, равную ⟨квадрату⟩ на DH, то она разделит эту ⟨прямую⟩ на соизмеримые ⟨части⟩ (предложение 17). Рассечём DH пополам в E и приложим к AH с недостатком в виде квадрата ⟨площадь⟩, равную ⟨квадрату⟩ на EH, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH; значит, AZ будет соизмерима с ZH. И через точки E, Z, H параллельно AC проведём EG, ZI, HK.



Черт. 101.

И поскольку AZ будет соизмерима с ZH линейно, то значит, и AH будет линейно соизмерима с каждой из AZ,

ZH (предложение 15). Но AH соизмерима с AC; значит, и каждая из AZ. ZH будет линейно соизмерима с AC (предложение 12). И AC рациональна; рациональна, значит, и каждая из AZ, ZH; так что и каждая из ⟨площадей⟩ AI, ZK будет рациональной (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И поскольку DE будет соизмерима с EH линейно, то значит, и DH будет линейно соизмерима с каждой из DE, EH (предложение 15). Но DH рациональна и несоизмерима с AC линейно; значит, и каждая из DE, EH будет рациональна и несоизмерима с AC линейно (предложение 13); значит, каждая из ⟨площадей⟩ DG, EK будет медиальной (предложение 20).

Тогда положим равный ⟨площади⟩ AI квадрат LM, равный же ⟨площади⟩ ZK квадрат NX, имеющий с ним общий угол LOM, отнимем; значит, квадраты LM, NX, будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги VI). Пусть их диаметр будет OR, и достроим ⟨известный⟩ чертёж (см. предложения 4, 7, 8 книги II). Поскольку теперь заключающийся между AZ, ZH прямоугольник равен квадрату на EH, то значит (предложение 17 книги VI), будет, что как AZ к EH, так и EH к ZH. Но как AZ к EH, так и ⟨площадь⟩ AI к EK, как же EH к ZH, так будет и ⟨площадь⟩ EK к KZ (предложение 1 книги VI); значит, для ⟨площадей⟩ AI, KZ средней пропорциональной будет EK. Также и для ⟨площадей⟩ LM, NX средней пропорциональной будет MN, как это доказано в предыдущих (предложение 53, лемма), и ⟨площадь⟩ AI равна квадрату LM, ⟨площадь⟩ же KZ ⟨равна⟩ NX; значит, и ⟨площадь⟩ MN равна будет EK. Но EK равна DG, MN же — LX (предложение 43 книги I); значит, DK равна будет гномону YFU и ещё ⟨квадрату⟩ NX. Так же и ⟨площадь⟩ AK равна квадратам LM, NX; значит, остаток AB будет равен ⟨площади⟩ ST. Но ST будет квадратом на LN; значит, квадрат на LN будет равен ⟨площади⟩ AB; значит, LN квадрирует ⟨площадь⟩ AB.

Вот я утверждаю, что LN будет вычетом.

Действительно, поскольку каждая из ⟨площадей⟩ AI, ZK рациональна и равна ⟨соответственно⟩ LM, NX, то значит, будет рациональна и каждая из ⟨площадей⟩ LM, NX,

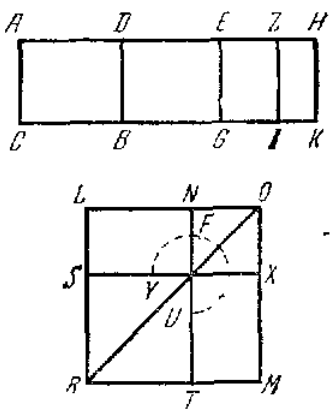
то-есть ⟨квадратов⟩ на каждой из LO, ON; значит, и каждая из LO, ON будет рациональной. Затем, поскольку ⟨площадь⟩ DG медиальна и равна LX, то медиальной, значит, будет и LX. Поскольку теперь ⟨площадь⟩ LX медиальна, NX же рациональна, то значит, LX будет несоизмерима с NX; как же LX к NX, так будет и ⟨прямая⟩ LO к ON (предложение 1 книги VI); значит, LO будет линейно несоизмерима с ON (предложение 11). И обе они рациональны; значит, LO, ON будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, LN будет вычетом (предложение 73). И он квадрирует площадь AB; значит, квадрирующая площадь AB будет вычетом.

Итак, если площадь заключается между рациональной и т. д.

Предложение 92

Если площадь заключается между рациональной и вторым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет первым медиальным вычетом.

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и вторым вычетом AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет первым медиальным вычетом (черт. 102).



Черт. 102.

Действительно, пусть сочетающаяся с AD будет DH; значит, AH, HD будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73), и сочетающаяся DH будет соизмеримой с отложенной рациональной AC, целая же AH в квадратах будет больше сочетающейся DH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно (определения третьи, 2). Поскольку теперь AH в квадратах больше HD на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то значит, если приложить к AH ⟨площадь⟩, равную четвёртой части ⟨квадрата⟩ на HD, с недостатком в виде квадрата, то она разделит эту ⟨прямую⟩ на соизмеримые части (предложение 17). Рассечём

теперь DH пополам в E; и приложим к AH равную ⟨квадрату⟩ на EH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH; значит, AZ будет соизмерима с ZH линейно. И, значит, AH будет линейно соизмерима с каждой из AZ, ZH (предложение 15). Но AH рациональна и несоизмерима с AC линейно; и значит, каждая из AZ, ZH будет рациональной и несоизмеримой с AC линейно (предложение 13); значит, каждая из ⟨площадей⟩ AI, ZK будет медиальной (предложение 20). Затем, поскольку DE соизмерима с EH, то значит, и DH будет соизмеримой с каждой из DE, EH (предложение 15). Но DH соизмерима с AC линейно [значит, и каждая из DE, EH будет рациональной и линейно соизмеримой с AC]. Значит, каждая из ⟨площадей⟩ DG, EK будет рациональной.

Построим теперь равный ⟨площади⟩ AI квадрат LM, равный же ⟨площади⟩ ZK ⟨квадрат⟩ NX, ⟨находящийся⟩ при том же самом, что и LM, угле, ⟨а именно⟩, угле LOM, отнимем; значит, квадраты LM, NX будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги V). Пусть их диаметр будет OR, и достроим ⟨известный⟩ чертёж. Поскольку теперь ⟨площади⟩ AI, ZK медиальны и равны ⟨соответственно квадратам⟩ на LO, ON, то и ⟨квадраты⟩ на LO, ON будут [значит] медиальными; значит, и ⟨прямые⟩ LO, ON будут медиальными, соизмеримыми только в степени. И поскольку ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH равен ⟨квадрату⟩ на EH, то значит, будет (предложение 17 книги VI), что как AZ к EH, так и EH к ZH; но как AZ к EH, так и ⟨площадь⟩ AI к EK (предложение 1 книги VI); как же EH к ZH, так [будет] и ⟨площадь⟩ EK к ZK: значит, для ⟨площадей⟩ AI, ZK средней пропорциональной будет EK. Также и для квадратов LM, NX средней пропорциональной будет MN (предложение 53, лемма); и ⟨площадь⟩ AI равна LM, ZK же ⟨равна⟩ NX; значит, и ⟨площадь⟩ MN равна будет EK. Но ⟨площади⟩ EK равна [будет] DG, ⟨площади⟩ же MN равна LX (предложение 43 книги I); значит, вся ⟨площадь⟩ DK равна будет гномону YFU и ⟨ещё квадрату⟩ NX. Поскольку теперь вся ⟨площадь⟩ AK равна ⟨вместе взятым⟩ LM, NX, из которых DK равна гномону YFU и ⟨ещё квадрату⟩ NX, то значит, остаток,

⟨площадь⟩ AB равна будет TS. Но TS будет ⟨квадратом⟩ на LN; значит, ⟨квадрат⟩ на LN будет равен площади AB; значит, ⟨прямая⟩ LN квадрирует площадь AB.

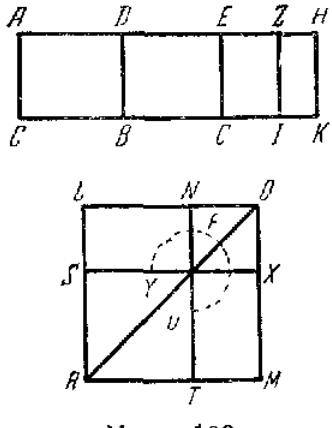
[Вот] я утверждаю, что LN будет первым медиальным вычетом.

Действительно, поскольку ⟨площадь⟩ EK рациональна и равна LX, то значит, рациональна будет и LX, то-есть ⟨прямоугольник⟩ между LO, ON. Доказано же, что NX медиален; значит LX будет несоизмерим с NX; как же LX к NX, так будет и ⟨прямая⟩ LO к ON (предложение 1 книги VI); значит, LO, ON будут линейно несоизмеримыми (предложение 11). Значит, LO, ON будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими рациональную ⟨площадь⟩; значит, LN будет первым медиальным вычетом (предложение 74); и она квадрирует площадь AB.

Итак, квадрирующая площадь AB будет первым медиальным вычетом, что и требовалось доказать.

Предложение 93

Если площадь заключается между рациональной и третьим вычетом, то квадрирующая эту площадь будет вторым медиальным вычетом.



Черт. 103.

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и третьим вычетом AD, я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет вторым медиальным вычетом (черт. 103).

Действительно, пусть сочетающаяся с CD будет DH; значит, AH, HD будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и никакая из AH, HD не будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной AC, целая же AH в квадратах будет больше сочетающейся DH на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (определения третьи, 3). Поскольку теперь AH в квадратах больше HD на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то значит, если приложить к AH равную

четвёртой части ⟨квадрата⟩ на DH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, то она разделяет эту ⟨прямую⟩ на соизмеримые ⟨части⟩ (предложение 17). Рассечём теперь DH пополам в E и приложим к AH равную ⟨квадрату⟩ на EH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH. И проведём через точки E, Z, H параллельно AC ⟨прямые⟩ EG, ZI, HK; значит, соизмеримыми будут ⟨прямые⟩ AZ, ZH: соизмерима, значит, и ⟨площадь⟩ AI с ZK (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И поскольку AZ, ZH линейно соизмеримы, то значит, и AH будет линейно соизмеримой с каждой из AZ, ZH (предложение 15). Но AH рациональна и несоизмерима с AC линейно, так что и ⟨прямые⟩ AZ, ZH ⟨будут несоизмеримы с AC линейно⟩ (предложение 13). Значит, каждая из ⟨площадей⟩ AI, ZK будет медиальной. Затем, поскольку DE линейно соизмерима с EH, то значит, и DH будет линейно соизмерима с каждой из DE, EH (предложение 15). Но HD рациональна и линейно несоизмерима с AC; значит, и каждая из DE, EH рациональна и линейно несоизмерима с AC (предложение 13); значит, и каждая из ⟨площадей⟩ DG, EK будет медиальной (предложение 20). И поскольку AH, HD соизмеримы только в степени, то значит, AH будет линейно несоизмерима с HD. Но AH будет линейно соизмеримой с AZ, DH же с EH; значит, AZ будет линейно несоизмерима с EH (предложение 13) Как же AZ к EH, так будет и ⟨площадь⟩ AI к EK (предложение 1 книги VI); значит, ⟨площадь⟩ AI будет несоизмеримой с EK (предложение 11).

Построим теперь равный ⟨площади⟩ AI квадрат LM, равный же ⟨площади⟩ ZK ⟨квадрат⟩ NX, находящийся при том же самом угле, что и LM, отнимем; значит ⟨площади⟩ LM, NX будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги VI). Пусть их диаметр будет OR, и достроим ⟨известный⟩ чертёж. Поскольку теперь ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH равен ⟨квадрату⟩ на EH, то значит, будет, что как AZ к EH, так и EH к ZH (предложение 17 книги VI). Но как AZ к EH, так будет и ⟨площадь⟩ AI к EK (предложение 1 книги VI); как же EH к ZH, так будет

и ⟨площадь⟩ EK к ZK; и значит, как ⟨площадь⟩ AI к EK, так и EK к ZK; значит, для AI, ZK средней пропорциональной будет EK. Также и для квадратов LM, NX средней пропорциональной будет ⟨площадь⟩ MN (предложение 53, лемма); и ⟨площадь⟩ AI равна будет LM, ZK же NX; и значит, EK равна будет MN. Но MN равна LX (предложение 43 книги I), EK же равна [будет] DG; значит, и вся ⟨площадь⟩ DK равна будет гномону YFU и ⟨ещё квадрату⟩ NX. Также и ⟨площадь⟩ AK равна ⟨вместе взятым⟩ LM, NX; значит, остаток — ⟨площадь⟩ AB — равен будет ST, то-есть квадрату на LN; значит, LN квадрирует площадь AB.

Я утверждаю, что LN будет вторым медиальным вычетом.

Действительно, поскольку доказано, что ⟨площади⟩ AI, ZK медиальны, и они равны ⟨соответственно квадратам⟩ на LO, ON, то значит, и каждый из ⟨квадратов⟩ на LO, ON медиален; медиальна, значит, каждая из ⟨прямых⟩ LO, ON. И поскольку ⟨площадь⟩ AI соизмерима с ZK (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X), то значит, и ⟨квадрат⟩ на LO соизмерим с ⟨квадратом⟩ на ON. Затем, поскольку ⟨площадь⟩ AI оказалась несоизмеримой с EK, то значит, и ⟨площадь⟩ LM несоизмерима будет с MN, то-есть ⟨квадрат⟩ на LO с ⟨прямоугольником⟩ между LO, NO; так что и ⟨прямая⟩ LO будет линейно несоизмерима с ON (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X); значит, LO, ON будут медиалями, соизмеримыми только в степени.

Вот я утверждаю, что они заключают медиальную ⟨площадь⟩.

Действительно, поскольку доказано, что ⟨площадь⟩ EK медиальна и она равна ⟨прямоугольнику⟩ между LO, ON, то медиальным, значит, будет и ⟨прямоугольник⟩ между LO, ON; так что LO, ON будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими медиальную ⟨площадь⟩. Значит, LN будет вторым медиальным вычетом (предложение 75): и она квадрирует площадь AB.

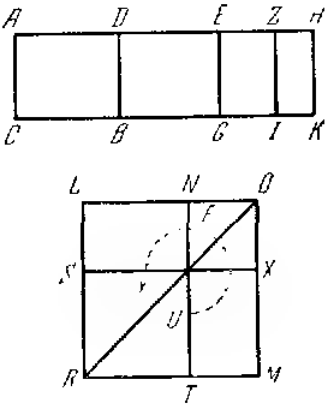
Итак, квадрирующая площадь AB будет вторым медиальным вычетом, что и требовалось доказать.

Предложение 94

Если площадь заключается между рациональной и четвёртым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет «меньшей» ⟨иррациональной⟩.

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и четвёртым вычетом AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет «меньшей» ⟨иррациональной⟩ (черт. 104).

Действительно, пусть сочетающаяся с AD будет DH; значит, AH, HD будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и AH будет линейно соизмерима с отложенной рациональной AC, целая же AH в квадратах будет больше сочетающейся DH на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно (определения третьи, 4). Поскольку теперь AH в квадратах более HD на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой линейно, то значит, если приложить к AH равную четвёртой части ⟨квадрата⟩ на DH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, то она разделяет эту ⟨прямую⟩ на несоизмеримые ⟨части⟩ (предложение 18). Рассечём теперь DH пополам в E, и приложим к AH равную ⟨квадрату⟩ на EH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH; значит, AZ будет несоизмеримой линейно с ZH. Проведём теперь через E, Z, H параллельно AC, BD ⟨прямые⟩ EG, ZI, HK. Поскольку теперь AH рациональна и линейно соизмерима с AC, то значит, вся ⟨площадь⟩ AK будет рациональна. Затем, поскольку DH линейно несоизмерима с AC и обе они рациональны, то значит, ⟨площадь⟩ DK будет медиальной (предложение 21). Затем, поскольку AZ линейно несоизмерима с ZH, то значит, и ⟨площадь⟩ AI будет несоизмеримой с ZK (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Построим теперь равный ⟨площади⟩ AI квадрат LM,



Черт. 104.

равный же ⟨площади⟩ ZK при том же самом угле LOM ⟨квадрат⟩ NX отнимем. Значит, квадраты LM, NX будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги VI). Пусть их диаметр будет OR, и достроим ⟨известный⟩ чертёж. Поскольку теперь ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH равен ⟨квадрату⟩ на EH, то значит, будет пропорция — как AZ к EH, так и EH к ZH (предложение 17 книги VI). Но как AZ к EH, так будет и ⟨площадь⟩ AI к EK, как же EH к ZH, так будет и ⟨площадь⟩ EK к ZK (предложение 1 книги VI); значит, для AI, ZK средней пропорциональной будет EK. Также и для квадратов LM, NX средней пропорциональной будет ⟨площадь⟩ MN (предложение 53, лемма), и ⟨площадь⟩ AI равна будет LM, ZK же ⟨равна⟩ NX; и, значит, EK равна будет MN. Но ⟨площади⟩ EK равна DG, ⟨площади⟩ же MN равна LX (предложение 43 книги I); значит, вся DK равна будет гномону YFU и ⟨ещё⟩ квадрату NX. Поскольку теперь вся AK равна ⟨взятым вместе⟩ квадратам LM, NX, у которых DK равна гномону YFU и квадрату NX, то значит, остаток, — ⟨площадь⟩ AB — равен будет ST, то-есть квадрату на LN; значит, LN квадрирует площадь AB.

Я утверждаю, что LN будет иррациональной, так называемой «меньшей».

Действительно, поскольку ⟨площадь⟩ AK рациональна и равна квадратам на LO, ON, то значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на LO, ON будет рационально. Затем, поскольку ⟨площадь⟩ DK медиальна, и DK будет равна дважды ⟨прямоугольнику⟩ между LO, ON, то значит, дважды ⟨прямоугольник⟩ между LO, ON будет медиален. И поскольку ⟨площадь⟩ AI оказалась несоизмеримой с ZK, то значит, и квадрат на LO несоизмерим будет с квадратом на ON. Значит, LO, ON будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них рациональное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный. Значит, LN будет иррациональной, так называемой «меньшей» (предложение 76). И она квадрирует площадь AB.

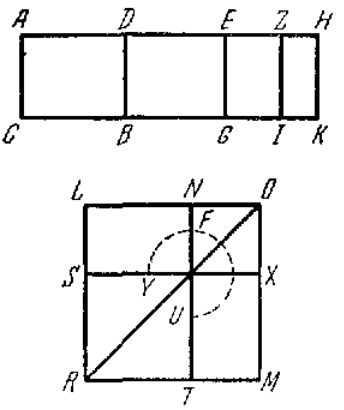
Итак, квадрирующая площадь AB будет «меньшей» иррациональной, что и требовалось доказать.

Предложение 95

Если площадь заключается между рациональной и пятым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет «образующей с рациональным целое медиальное».

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и пятым вычетом AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет «образующей с рациональным целое медиальное» (черт. 105).

Действительно, пусть сочетающаяся с AD будет DH; значит AH, HD будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и сочетающаяся HD будет линейно соизмерима с отложенной рациональной AC, целая же AH в квадратах будет больше сочетающейся DH на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (определения третьи, 5). Значит, если приложить к AH равную четвёртой части ⟨квадрата⟩ на DH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, то она разделит эту ⟨прямую⟩ на несоизмеримые ⟨части⟩ (предложение 18). Рассечём теперь DH пополам в точке E и приложим к AH равную ⟨квадрату⟩ на EH ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между AZ, ZH; значит, AZ будет линейно несоизмерима с ZH. И поскольку AH линейно несоизмерима с CA и обе они рациональны, то значит, ⟨площадь⟩ AK будет медиальной (предложение 21). Затем, поскольку DH рациональна и линейно соизмерима с AC, то ⟨площадь⟩ DK рациональна (предложение 19). Построим теперь равный ⟨площади⟩ AI квадрат LM, равный же ⟨площади⟩ ZK квадрат NX при том же угле LOM отнимем; значит, квадраты LM, NX будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги VI). Пусть их диаметр будет OR, и достроим ⟨известный⟩ чертёж. Подобным же вот образом докажем, что LN квадрирует площадь AB.



Черт. 105.

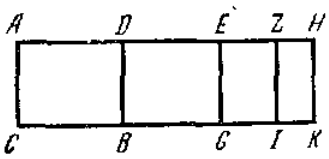
Я утверждаю, что LN будет «образующей с рациональным целое медиальное».

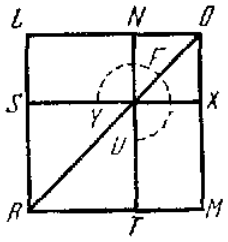
Действительно, поскольку ⟨площадь⟩ AK оказалась медиальной и она равна ⟨квадратам⟩ на LO, ON, то значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на LO, ON медиально. Затем поскольку ⟨площадь⟩ DK рациональна и равна дважды ⟨прямоугольнику⟩ между LO, ON, то и он будет рационален. И поскольку ⟨площадь⟩ AI несоизмерима с ZK, то значит, и ⟨квадрат⟩ на LO будет несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на ON; значит, LO, ON будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними рациональный. Значит, остающаяся ⟨прямая⟩ LN будет иррациональной, так называемой «образующей с рациональным целое медиальное» (предложение 77); и она квадрирует ⟨площадь⟩ AB.

Итак, квадрирующая площадь AB будет «образующей с рациональным целое медиальное», что и требовалось доказать.

Предложение 96

Если площадь заключается между рациональной и шестым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет образующей с медиальным целое медиальное.





Черт. 106.

Пусть площадь AB заключается между рациональной AC и шестым вычетом AD; я утверждаю, что квадрирующая площадь AB будет образующей с медиальным целое медиальное (черт. 106).

Действительно, пусть сочетающаяся с AD будет DH; значит, AH, HD будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и никакая из них не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной AC, целая же AH в квадратах будет больше сочетающейся DH на ⟨квадрат⟩ на линейно с собой несоизмеримой (определения третьи, 6). Поскольку теперь

AH в квадратах больше *HD* на ⟨квадрат⟩ на линейно с собой несоизмеримой, то значит, если приложить к *AH* равную четвёртой части ⟨квадрата⟩ на *DH* ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, то она разделит эту ⟨прямую⟩ на несоизмеримые ⟨части⟩ (предложение 18). Разделим теперь *DH* пополам в [точке] *E*, и приложим к *AH* равную ⟨квадрату⟩ на *EH* ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, и пусть это будет ⟨прямоугольник⟩ между *AZ*, *ZH*; значит, *AZ* будет несоизмеримой с *ZH* линейно. Как же *AZ* к *ZH*, так будет и ⟨прямоугольник⟩ *AI* к *ZK* (предложение 1 книги VI); значит, *AI* будет несоизмерим с *ZK* (предложение 11). И поскольку *AH*, *AC* будут рациональными, соизмеримыми только в степени, ⟨площадь⟩ *AK* будет медиальной (предложение 21). Затем, поскольку *AC*, *DH* рациональны и линейно несоизмеримы, то и ⟨площадь⟩ *DK* будет медиальной. Поскольку теперь *AH*, *HD* соизмеримы только в степени, то значит, *AH* будет несоизмерима с *HD* линейно. Как же *AH* к *HD*, так будет и ⟨площадь⟩ *AK* к *KD* (предложение 1 книги VI); значит, *AK* будет несоизмерима с *KD* (предложение 11). Построим теперь равный ⟨площади⟩ *AI* квадрат *LM*, равный же ⟨площади⟩ *ZK* при том же самом угле ⟨квадрат⟩ *NX* отнимем; значит, квадраты *LM*, *NX* будут на одном и том же диаметре (предложение 26 книги VI). Пусть их диаметр будет *OR*, и достроим ⟨известную⟩ фигуру. Подобно вот тому, как выше, докажем, что *LN* квадрирует площадь *AB*.

Я утверждаю, что *LN* будет образующей с медиальным целое медиальное.

Действительно, поскольку ⟨площадь⟩ *AK* оказалась медиальной, и она равна ⟨квадратам⟩ на *LO*, *ON*, то значит, составленное из ⟨квадратов⟩ на *LO*, *ON* будет медиальным. Затем, поскольку оказалась медиальной ⟨площадь⟩ *DK*, и она равна дважды ⟨прямоугольнику⟩ между *LO*, *ON*, то и дважды ⟨прямоугольник⟩ между *LO*, *ON* будет медиальным. И поскольку *AK* оказалась несоизмеримой с *DK*, то [значит] несоизмеримы будут и ⟨вместе взятые⟩ квадраты на *LO*, *ON* с дважды ⟨прямоугольником⟩ между *LO*, *ON*. И поскольку ⟨площадь⟩ *AI* будет несоизмерима с *ZK*, то значит, и ⟨квадрат⟩ на *LO* несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на

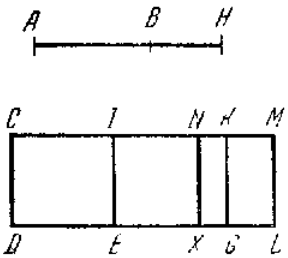
ON; значит, LO, ON будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное и дважды ⟨прямоугольник⟩ на них медиальный, и ещё квадраты на них ⟨вместе взятые⟩, несоизмеримые с дважды ⟨прямоугольником⟩ между ними. Значит, LN будет иррациональной, так называемой образующей с медиальным целое медиальное (предложение 78); и она квадрирует площадь AB.

Итак, квадрирующая эту площадь будет образующей с медиальным целое медиальное, что и требовалось доказать.

Предложение 97

⟨Квадрат⟩ на вычете, приложенный к рациональной образует шириной первый вычет (60).

Пусть будет вычет AB, рациональная же CD, и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет первым вычетом (черт. 107).



Черт. 107.

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73). И приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG и равную ⟨квадрату⟩ на BH ⟨площадь⟩ KL. Значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB; из них ⟨площадь⟩ CE равна будет ⟨квадрату⟩ на AB; значит, остаток — ⟨площадь⟩ IL — равен будет дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB (предложение 7 книги II). Разделим IM пополам в точке N и проведём через N параллельно CD ⟨прямую⟩ NX; значит, каждая из ⟨площадей⟩ IX, LN равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB. И поскольку ⟨квадраты⟩ на AH, HB ⟨вместе⟩ рациональны, и ⟨квадратам⟩ на AH, HB равна ⟨площадь⟩ DM, то значит, рациональной будет и ⟨площадь⟩ DM. И приложена она к рациональной CD, образуя ширину CM; значит, CM будет рациональной и линейно соизмеримой с CD (предложение 20). Затем, поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB медиален, и дважды ⟨прямо-

угольник〉 между *AH*, *HB* равен 〈площади〉 *IL*, то значит, медиальна и *IL*. И она прилагается к рациональной *CD*, образуя ширину *IM*; значит, *IM* будет рациональна и несоизмерима с *CD* линейно (предложение 22). И поскольку 〈квадраты〉 на *AH*, *HB* 〈вместе〉 рациональны, дважды же 〈прямоугольник〉 между *AH*, *HB* медиален, то значит, 〈квадраты〉 на *AH*, *HB* 〈вместе〉 будут несоизмеримы с дважды 〈прямоугольником〉 между *AH*, *HB*. И 〈вместе взятым квадратам〉 на *AH*, *HB* равна 〈площадь〉 *CL*, дважды же 〈прямоугольнику〉 между *AH*, *HB* — 〈площадь〉 *IL*; значит, *DM* будет несоизмерима с *IL*. Как же 〈площадь〉 *DM* к *IL*, так будет и 〈прямая〉 *CM* к *IM* (предложение 1 книги VI). Значит, *CM* будет несоизмерима с *IM* линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, *CM*, *MI* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *CI* будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и первым.

Действительно, поскольку для 〈квадратов〉 на *AH*, *HB* средним пропорциональным будет 〈прямоугольник〉 между *AH*, *HB* (предложение 21, лемма), и 〈квадрату〉 на *AH* равна 〈площадь〉 *CG*, 〈квадрату〉 же на *BH* равна 〈площадь〉 *KL*, 〈прямоугольнику〉 же между *AH*, *HB* — 〈площадь〉 *NL*, то значит, для *CG*, *KL* средней пропорциональной будет 〈площадь〉 *NL*; значит, будет, что как *CG* к *NL*, так и *NL* к *KL*. Но как 〈площадь〉 *CG* к *NL*, так будет и 〈прямая〉 *CK* к *NM* (предложение 1 книги VI); как же 〈площадь〉 *NL* к *KL*, так будет и 〈прямая〉 *NM* к *KM*; значит, 〈прямоугольник〉 между *CK*, *KM* равен будет 〈квадрату〉 на *NM* (предложение 17 книги VI), то-есть четвёртой части 〈квадрата〉 на *IM*. И поскольку 〈квадрат〉 на *AH* соизмерим с 〈квадратом〉 на *HB*, то соизмерима [будет] и 〈площадь〉 *CG* с *KL*. Как же *CG* к *KL*, так и 〈прямая〉 *CK* к *KM* (предложение 1 книги VI); значит, *CK* будет соизмерима с *KM* (предложение 11). Поскольку теперь будут две неравные прямые *CM*, *MI*, и к *CM* приложена равная четвёртой части 〈квадрата〉 на *IM* 〈площадь〉 с недостатком в виде квадрата, 〈именно прямоугольник〉 между *CK*, *KM*, и *CK* соизмерима с *KM*, то значит, *CM* в квадратах будет больше *MI* на 〈квадрат〉 на соизмеримой

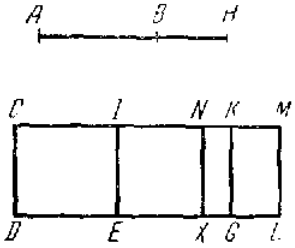
с собой линейно (предложение 17). И CM линейно соизмерима с отложенной рациональной CD; значит, CI будет первым вычетом.

Итак, ⟨квадрат⟩ на вычете, приложенный к рациональной, образует шириной первый вычет, что и требовалось доказать.

Предложение 98

⟨Квадрат⟩ на первом медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной второй вычет.

Пусть будет первый медиальный вычет AB, рациональная же CD, и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет вторым вычетом (черт. 108).



Черт. 108.

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими рациональную ⟨площадь⟩ (предложение 74). И приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG, образующую ширину CK, и равную ⟨квадрату⟩ на HB ⟨площадь⟩ KL, образующую ширину KM; значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB; значит, медиальной будет и CL. И прилагается она к рациональной CD, образуя ширину CM; значит, CM будет рациональной и несоизмеримой с CD линейно (предложение 22). И поскольку ⟨площадь⟩ CL равна ⟨квадратам⟩ на AH, HB, из которых ⟨квадрат⟩ на AB равен ⟨площади⟩ CE, то значит, остаток — дважды ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB — равен будет ⟨площади⟩ IL (предложение 7 книги II). Дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB [будет] рациональ; значит, ⟨площадь⟩ IL рациональна. И прилагается она к рациональной IE, образуя ширину IM; рациональной, значит, будет и IM и соизмеримой с CD линейно (предложение 20). Поскольку теперь ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AH, HB, то-есть ⟨площадь⟩ CL, медиальны, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB, то-есть

⟨площадь⟩ IL, рационален, то значит, CL несоизмерима будет с IL. Как же ⟨площадь⟩ CL к IL, так будет и ⟨прямая⟩ CM к IM (предложение 1 книги VI); значит, CM будет несоизмерима с IM линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, CM, MI будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, CI будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и вторым.

Действительно, разделим IM пополам в N и проведём через N параллельно CD ⟨прямую⟩ NX; значит, каждая из ⟨площадей⟩ IX, NL равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB. И поскольку для квадратов на AH, HB средним пропорциональным будет ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB (предложение 21, лемма), и ⟨квадрат⟩ на AH равен ⟨площади⟩ CG, ⟨прямоугольник⟩ же между AH, HB — ⟨площади⟩ NL, ⟨квадрат⟩ же на BH—⟨площади⟩ KL, то значит, для CG, KL средним пропорциональным будет ⟨площадь⟩ NL; значит, будет, что как CG к NL, так и NL к KL. Но как ⟨площадь⟩ CG к NL, так будет и ⟨прямая⟩ CK к NM, как же ⟨площадь⟩ NL к KL, так будет и ⟨прямая⟩ NM к MK (предложение 1 книги VI); значит, как CK к NM, так будет и NM к KM; значит ⟨прямоугольник⟩ между CK, KM равен будет ⟨квадрату⟩ на NM (предложение 17 книги VI), то-есть четвёртой части ⟨квадрата⟩ на IM [и поскольку ⟨квадрат⟩ на AH соизмерим с ⟨квадратом⟩ на BH, то и ⟨площадь⟩ CG соизмерима будет с KL, то-есть ⟨прямая⟩ CK с KM]. Поскольку теперь будут две неравные прямые CM, MI, и к большей CM приложена равная четвёртой части ⟨квадрата⟩ на MI ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата, ⟨именно прямоугольник⟩ между CK, KM, и разделяет её на соизмеримые ⟨части⟩, то значит, CM в квадратах будет больше MI на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой линейно (предложение 17). И сочетающаяся IM будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной CD; значит, CI будет вторым вычетом (определения третьи, 2).

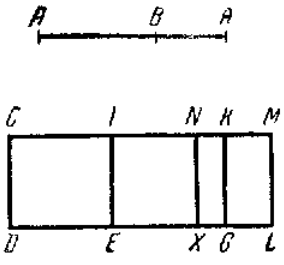
Итак, ⟨квадрат⟩ на первом медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной второй вычет, что и требовалось доказать.

Предложение 99

⟨Квадрат⟩ на втором медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной третий вычет.

Пусть будет второй медиальный вычет AB, рациональная же CD, и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет третьим вычетом (черт. 109).

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут медиалями, соизмеримыми только в степени, заключающими медиальную ⟨площадь⟩ (предложение 75). И приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG, образующую ширину CK, к KG же приложим равную ⟨квадрату⟩ на BH ⟨площадь⟩ KL, образующую ширину KM; значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB [и ⟨квадраты⟩ на AH, HB медиальны]; медиальна, значит, и CL. И она приложена к рациональной CD, образуя ширину CM; рациональной, значит, будет и CM и несоизмеримой с CD линейно (предложение 22). И поскольку вся ⟨площадь⟩ CL равна ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB, у которых ⟨площадь⟩ CE равна ⟨квадрату⟩ на AB, то значит, остаток — ⟨площадь⟩ LI — равен будет дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB (предложение 7 книги II). Разделим теперь IM пополам в точке N и параллельно CD проведём NX; значит, каждая из ⟨площадей⟩ IX, NL равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB. ⟨Прямоугольник⟩ же между AH, HB медиален; медиальной, значит, будет и ⟨площадь⟩ IL. И прилагается она к рациональной EI, образуя ширину IM; рациональна, значит, и IM и несоизмерима с CD линейно (предложение 22). И поскольку AH, HB будут соизмеримы только в степени, то значит, AH [будет] линейно несоизмерима с HB; значит, и ⟨квадрат⟩ на AH будет несоизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между AH, HB (предложение 21, лемма; предложение 11). Но с ⟨квадратом⟩ на AH соизмеримы ⟨квадраты⟩ на AH, HB, с ⟨прямо-



Черт. 109.

угольником〉 же между *AH*, *HB* — дважды 〈прямоугольник〉 между *AH*, *HB*; значит, 〈вместе взятые квадраты〉 на *AH*, *HB* будут несоизмеримы с дважды 〈прямоугольником〉 между *AH*, *HB* (предложение 13). Но 〈вместе взятым квадратам〉 на *AH*, *HB* равна 〈площадь〉 *CL*, дважды же 〈прямоугольнику〉 между *AH*, *HB* равна 〈площадь〉 *IL*; значит, 〈площадь〉 *CL* будет несоизмерима с *IL*. Как же *CL* к *IL*, так будет и 〈прямая〉 *CM* к *IM* (предложение 1 книги VI); значит, *CM* будет несоизмерима с *IM* линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, *CM*, *MI* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *CI* будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и третьим.

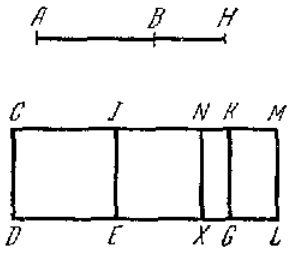
Действительно, поскольку 〈квадрат〉 на *AH* соизмерим с 〈квадратом〉 на *HB*, то значит, и 〈площадь〉 *CG* соизмерима с *KL*; так что и 〈прямая〉 *CK* с *KM* (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). И поскольку для 〈квадратов〉 на *AH*, *HB* средним пропорциональным будет 〈прямоугольник〉 между *AH*, *HB* (предложение 21, лемма), и 〈квадрату〉 на *AH* равна будет 〈площадь〉 *CG*, 〈квадрату〉 же на *HB* равна 〈площадь〉 *KL*, 〈прямоугольнику〉 же между *AH*, *HB* равна 〈площадь〉 *NL*, то значит, для *CG*, *KL* средним пропорциональным будет *NL*; значит, будет, что как *CG* к *NL*, так и *NL* к *KL*. Но как 〈площадь〉 *CG* к *NL*, так будет и 〈прямая〉 *CK* к *NM* (предложение 1 книги VI), как же 〈площадь〉 *NL* к *KL*, так будет и 〈прямая〉 *NM* к *KM*; значит, как 〈прямая〉 *CK* к *MN*, так будет и *MN* к *KM*; значит, (предложение 17 книги VI) 〈прямоугольник〉 между *CK*, *KM* равен будет [〈квадрату〉 на *MN*, то-есть] четвёртой части 〈квадрата〉 на *IM*. Поскольку теперь будут две неравные прямые *CM*, *MI*, и к *CM* приложена равная четвёртой части 〈квадрата〉 на *IM* 〈площадь〉 с недостатком в виде квадрата и разделяет её на соизмеримые 〈части〉, то значит, *CM* в квадратах будет больше *MI* на 〈квадрат〉 на соизмеримой с собой 〈прямой〉. И никакая из *CM*, *MI* не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной *CD*; значит, *CI* будет третьим вычетом (определения третьи, 3).

Итак, ⟨квадрат⟩ на втором медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной третий вычет, что и требовалось доказать.

Предложение 100

⟨Квадрат⟩ на «меньшей» ⟨иррациональной⟩, приложенный к рациональной, образует шириной четвёртый вычет.

Пусть будет «меньшая» ⟨иррациональная⟩ AB, рациональная же CD, и приложим к рациональной CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет четвёртым вычетом (черт. 110).



Черт. 110.

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на AH, HB рациональное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB медиальный (предложение 76). И приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG, образующую ширину CK, и равную ⟨квадрату⟩ на BH ⟨площадь⟩ KL, образующую ширину KM; значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB. И составленное из ⟨квадратов⟩ на AH, HB рационально; рациональной, значит, будет и ⟨площадь⟩ CL. И она прилагается к рациональной CD, образуя ширину CM; рациональна, значит, и CM и соизмерима с CD линейно (предложение 20). И поскольку целая ⟨площадь⟩ CL равна ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB, у которых ⟨площадь⟩ CE равна ⟨квадрату⟩ на AB, то значит, остаток — ⟨площадь⟩ IL — равен будет дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB (предложение 7 книги II). Рассечём теперь IM пополам в точке N и проведём через N параллельно каждой из CD, ML ⟨прямую⟩ NX; значит, каждая из ⟨площадей⟩ IX, NL равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB. И поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB медиален и равен ⟨площади⟩ IL, то значит, и ⟨площадь⟩ IL

будет медиальна. И прилагается она к рациональной *IE*, образуя ширину *IM*; значит, *IM* будет рациональна и линейно несоизмерима с *CD* (предложение 22). И поскольку составленное из ⟨квадратов⟩ на *AH*, *HB* рационально, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между *AH*, *HB* медиален, то [значит] несоизмеримы будут ⟨вместе взятые квадраты⟩ на *AH*, *HB* с дважды ⟨прямоугольником⟩ между *AH*, *HB*. ⟨Площадь⟩ же *CL* [будет] равна ⟨квадратам⟩ на *AH*, *HB*, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между *AH*, *HB* равна ⟨площадь⟩ *IL*; значит, *CL* [будет] несоизмеримой с *IL*. Как же ⟨площадь⟩ *CL* к *IL*, так будет и ⟨прямая⟩ *CM* к *MI* (предложение 1 книги VI); значит, *CM* будет несоизмерима с *MI* линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, *CM*, *MI* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *CI* будет вычетом (предложение 73).

[Вот] я утверждаю, что и четвёртым.

Действительно, поскольку *AH*, *HB* несоизмеримы в степени, то значит, и ⟨квадрат⟩ на *AH* несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на *HB*, и ⟨квадрату⟩ на *AH* равна будет ⟨площадь⟩ *CG*, ⟨квадрату⟩ же на *HB* равна ⟨площадь⟩ *KL*; значит, *CG* будет несоизмеримой с *KL*. Как же *CG* к *KL*, так будет ⟨прямая⟩ *CK* к *KM* (предложение 1 книги VI); значит, *CK* будет линейно несоизмерима с *KM* (предложение 11). И поскольку для ⟨квадратов⟩ на *AH*, *HB* средним пропорциональным будет ⟨прямоугольник⟩ между *AH*, *HB* (предложение 21, лемма), и ⟨квадрат⟩ на *AH* равен будет ⟨площади⟩ *CG*, ⟨квадрат⟩ же на *HB* — ⟨площади⟩ *KL*, ⟨прямоугольник⟩ же между *AH*, *HB* — ⟨площади⟩ *NL*, то значит, для *CG*, *KL* средней пропорциональной будет ⟨площадь⟩ *NL*: значит, будет, что как *CG* к *NL*, так и *NL* к *KL*. Но как *CG* к *NL*, так будет и ⟨прямая⟩ *CK* к *NM*, как же *NL* к *KL*, так будет и ⟨прямая⟩ *NM* к *KM* (предложение 1 книги VI); значит, как *CK* к *MN*, так будет и *MN* к *KM*; значит, ⟨прямоугольник⟩ между *CK*, *KM* равен будет ⟨квадрату⟩ на *MN*, то-есть четвёртой части ⟨квадрата⟩ на *IM* (предложение 17 книги VI). Поскольку теперь будут две неравные прямые *CM*, *MI*, и к *CM* приложена равная четвёртой части ⟨квадрата⟩ на *MI* ⟨площадь⟩ с недостатком

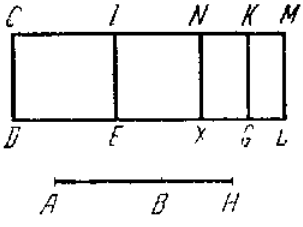
в виде квадрата — ⟨именно прямоугольник⟩ между CK, KM, и разделяет её на несоизмеримые части, то значит, CM в квадратах будет больше MI на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 18). И целая CM будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной CD; значит, CI будет четвёртым вычетом (определения третьи, 4).

Итак, ⟨квадрат⟩ на меньшей ⟨иррациональной⟩ и т. д.

Предложение 101

⟨Квадрат⟩ на образующей с рациональным целое медиальное, приложенный к рациональной, образует шириной пятый вычет.

Пусть образующая с рациональным целое медиальное будет AB, рациональная же CD, и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет пятым вычетом (черт. 111).



Черт. 111.

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут прямыми, несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное, дважды же ⟨прямоугольник⟩ между ними рациональный (предложение 77). И приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG, и равную ⟨квадрату⟩ на HB ⟨площадь⟩ KL; значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB. Составленное же из ⟨квадратов⟩ на AH, HB вместе будет медиально; медиальной, значит, будет ⟨и площадь⟩ CL. И прилагается она к рациональной CD, образуя ширину CM; значит, CM будет рациональна и несоизмерима с CD (предложение 22). И поскольку вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB, у которых ⟨площадь⟩ CE равна ⟨квадрату⟩ на AB, то значит, остаток — ⟨площадь⟩ IL — равен будет дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB (предложение 7 книги II). Рассечём теперь IM пополам в N и проведём через N параллельную каждой из CD,

ML ⟨прямую⟩ *NX*; значит, каждая из ⟨площадей⟩ *IX*, *NL* равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между *AH*, *HB*. И поскольку дважды ⟨прямоугольник⟩ между *AH*, *HB* будет рационален и [будет] равен ⟨площади⟩ *IL*, то значит, *IL* будет рациональна. И прилагается она к рациональной *EI*, образуя ширину *IM*; значит, *IM* будет рациональна и соизмерима с *CD* линейно (предложение 20). И поскольку ⟨площадь⟩ *CL* медиальна, *IL* же рациональна, то значит *CL* будет несоизмерима с *IL*. Как же *CL* к *IL*, так и ⟨прямая⟩ *CM* к *MI* (предложение 1 книги VI); значит, *CM* будет несоизмерима с *MI* линейно (предложение 11). И обе они рациональны; значит, *CM*, *MI* будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, *CI* будет вычетом (предложение 73).

Вот я утверждаю, что и пятым.

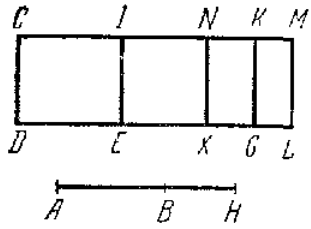
Действительно, подобным же образом докажем, что ⟨прямоугольник⟩ между *CK*, *KM* будет равен ⟨квадрату⟩ на *MN*, то-есть четвёртой части ⟨квадрата⟩ на *IM*. И поскольку ⟨квадрат⟩ на *AH* несоизмерим с ⟨квадратом⟩ на *HB*, ⟨квадрат⟩ же на *AH* равен ⟨площади⟩ *CG*, а ⟨квадрат⟩ на *HB* — ⟨площади⟩ *KL*, то значит, *CG* несоизмерима с *KL*. Как же *CG* к *KL*, так и ⟨прямая⟩ *CK* к *KM* (предложение 1 книги VI); значит, *CK* линейно несоизмерима с *KM* (предложение 11). Поскольку теперь будут две неравные прямые *CM*, *MI*, и к *CM* приложена равная четвёртой части ⟨квадрата⟩ на *IM* ⟨площадь⟩ с недостатком в виде квадрата и разделяет её на несоизмеримые ⟨части⟩, то значит, *CM* в квадратах будет больше *MI* на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 18). И сочетающаяся *IM* соизмерима с отложенной рациональной *CD*; значит, *CI* будет пятым вычетом (определения третьи, 5), что и требовалось доказать.

Предложение 102

⟨Квадрат⟩ на образующей с медиальным целое медиальное, приложенный к рациональной, даёт шириной шестой вычет.

Пусть образующая с медиальным целое медиальное будет AB, рациональная же CD, и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на AB ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; я утверждаю, что CI будет шестым вычетом (черт. 112).

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BH; значит, AH, HB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное и дважды ⟨прямоугольник⟩ на AH, HB медиальный, и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AH, HB несоизмеримые с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AH, HB (предложение 78). Приложим теперь к CD равную ⟨квадрату⟩ на AH ⟨площадь⟩ CG, образующую ширину CK, и ⟨квадрату⟩ на BH ⟨равную площадь⟩ KL; значит, вся ⟨площадь⟩ CL равна будет ⟨квадратам⟩ на AH, HB; значит, и CL будет медиальной. И прилагается она к рациональной CD, образуя ширину CM; значит, CM будет рациональной и линейно несоизмеримой с CD (предложение 22). Поскольку теперь ⟨площадь⟩ CL равна ⟨вместе взятым квадратам⟩ на AH, HB, у которых ⟨площадь⟩ CE равна ⟨квадрату⟩ на AB, то значит, остаток — ⟨площадь⟩ IL — равен будет дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB (предложение 7 книги II). И дважды ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB медиален; значит, и ⟨площадь⟩ IL будет медиальна. И прилагается она к рациональной IE, образуя ширину IM; значит, IM будет рациональна и несоизмерима с CD линейно (предложение 22). И поскольку ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AH, HB несоизмеримы с дважды ⟨прямоугольником⟩ между AH, HB, и ⟨квадратам⟩ на AH, HB равна будет ⟨площадь⟩ CL, дважды же ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB равна ⟨площадь⟩ IL, то значит, CL несоизмерима [будет] с IL. Как же CL к IL, так будет и ⟨прямая⟩ CM к MI (предложение I книги VI); значит CM будет несоизмерима с MI линейно (предложение 11). И обе они рациональны. Значит, CM, MI будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, CI будет вычетом.



Черт. 112.

Вот я утверждаю, что и шестым.

Действительно, поскольку ⟨площадь⟩ IL равна дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB, рассечём пополам IM в N и проведём через N параллельную CD ⟨прямую⟩ NX; значит, каждая из ⟨площадей⟩ IX, NL равна будет ⟨прямоугольнику⟩ между AH, HB. И поскольку AH, HB несоизмеримы в степени, то значит, ⟨квадрат⟩ на AH несоизмерим будет с ⟨квадратом⟩ на HB. Но ⟨квадрату⟩ на AH равна будет ⟨площадь⟩ CG, ⟨квадрату⟩ же на HB равна будет ⟨площадь⟩ KL; значит, CG будет несоизмерима с KL. Как же CG к KL, так будет и ⟨прямая⟩ CK к KM (предложение 1 книги VI); значит, CK будет несоизмерима с KM (предложение 11). И поскольку для ⟨квадратов⟩ на AH, HB средним пропорциональным будет ⟨прямоугольник⟩ между AH, HB (предложение 21, лемма) и ⟨квадрату⟩ на AH равна будет ⟨площадь⟩ CG, ⟨квадрату⟩ же на HB равна ⟨площадь⟩ KL, ⟨прямоугольнику⟩ же между AH, HB равна ⟨площадь⟩ NL, то значит, для CG, KL средним пропорциональным будет NL; значит, будет, что как CG к NL, так и NL к KL. И вследствие того же ⟨прямая⟩ CM в квадратах будет больше MI на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 18). И никакая из них не будет соизмерима с отложенной рациональной CD; значит, CI будет шестым вычетом (определения третьи, 6), что и требовалось доказать.

Предложение 103

Линейно соизмеримая с вычетом будет вычетом и тем же самым по рангу.

Пусть будет вычет AB, и пусть CD будет линейно соизмеримой с AB; я утверждаю, что и CD будет вычетом и тем же самым по рангу, что AB (черт. 113).

Черт. 113.

Действительно, поскольку AB вычет, то пусть сочетающаяся с ним будет BE; значит, AE, EB будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73). И сделаем, чтобы с отношением AB к CD было бы тождественно отношение BE к DI (предложение

12 книги VI); и, значит, как один к одному, так и все [будут] ко всем (предложение 12 книги V); будет, значит, что как вся AE ко всей CI, так и AB к CD. Но AB соизмерима с CD линейно; значит, и AE соизмерима с CI, BE же с DI (предложение 11). И AE, EB рациональные, соизмеримые только в степени; значит, и CI, ID будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 13), [значит, CD будет вычетом.

Вот я утверждаю, что и по рангу тем же самым, что AB].

Поскольку теперь будет, что как AE к CI, так и BE к DI, то значит, «перестановкой» (предложение 16 книги V) будет, что как AE к EB, так и CI к ID. Тогда в квадратах AE будет больше EB или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или же на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой. Если теперь AE в квадратах больше EB на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то и CI в квадратах будет больше ID на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 14). И если AE будет линейно соизмерима с отложенной рациональной, то и CI (предложение 12), если же BE, то и DI, если же никакая из AE, EB, то и никакая из CI, ID (предложение 13). Если же AE в квадратах больше [EB] на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, то и CI в квадратах будет больше ID на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 14). И если AE будет линейно соизмерима с отложенной рациональной, то и CI, если же BE, то и DI (предложение 12), если же никакая из AE, EB, то и никакая из CI, ID (предложение 13).

Значит, CD будет вычетом (предложение 73) и по рангу тем же самым, что AB (определения третьи, 1—6), что и требовалось доказать.

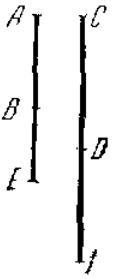
Предложение 104

Соизмеримая с медиальным вычетом будет медиальным вычетом и тем же самым по рангу.

Пусть будет медиальный вычет AB, и пусть CD будет линейно соизмерима с AB; я утверждаю, что и CD будет

медиальным вычетом и тем же самым по рангу, что AB (черт. 114).

Действительно, поскольку AB медиальный вычет, то пусть сочетающаяся с ним будет EB. Значит, AE, EB будут медиалями, соизмеримыми только в степени (предложения 74—75). И сделаем, чтобы как AB к CD, так и BE к DI (предложение 12 книги VI); значит, и AE [будет] соизмерима с CI, BE же с DI (предложение 12 книги V; предложение 11 книги X). Но AE, EB суть медиали, соизмеримые только в степени; значит, и CI, ID будут медиалями (предложение 23), соизмеримыми только в степени (предложение 13); значит, CD будет медиальным вычетом (предложения 74—75).



Черт. 114.

Вот я утверждаю, что и по рангу она будет тем же самым, что AB.

[Действительно], поскольку будет, что как AE к EB, так и CI к ID (предложения 12, 16 книги V) [но как AE к EB, так и ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AE, EB, как же CI к ID, так и ⟨квадрат⟩ на CI к ⟨прямоугольнику⟩ между CI, ID], значит, будет (предложение 21, лемма), что и как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AE, EB, так и ⟨квадрат⟩ на CI к ⟨прямоугольнику⟩ между CI, ID [и перестановкой, как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨квадрату⟩ на CI, так и ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB к ⟨прямоугольнику⟩ между CI, ID]. ⟨Квадрат⟩ же на AE соизмерим с ⟨квадратом⟩ на CI; значит и ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB будет соизмеримым с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID (предложение 16 книги V; предложение 11 книги X). Теперь, если ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB рационален, то рационален будет и ⟨прямоугольник⟩ между CI, ID (определение 4), если же медиален [будет] ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB, то медиальным [будет] и ⟨прямоугольник⟩ между CI, ID (предложение 23, следствие).

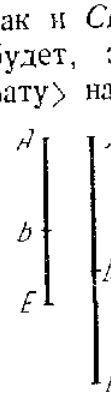
Значит, CD будет медиальным вычетом и по рангу тем же самым, что AB (предложения 74—75), что и требовалось доказать.

Предложение 105

Соизмеримая с «меньшей» ⟨иррациональной⟩ будет «меньшей.»

Пусть будет «меньшая» ⟨иррациональная⟩ AB и с AB соизмерима CD; я утверждаю, что и CD будет «меньшей» (черт. 115).

Действительно, сделаем то же самое ⟨как выше⟩; и поскольку AE, EB несоизмеримы в степени (предложение 76), то значит, и CI, ID будут несоизмеримы в степени (предложение 13). Поскольку теперь будет, что как AE к EB, так и CI к ID (предложения 12 и 16 книги V), то будет, значит, что и как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨квадрату⟩ на EB, так и ⟨квадрат⟩ на CI к ⟨квадрату⟩ на ID (предложение 20 книги VI, следствие). «Присоединяя» (предложение 18 книги V), значит, будет, что как ⟨вместе взятые квадраты⟩ на AE, EB к ⟨квадрату⟩ на EB, так и ⟨вместе взятые квадраты⟩ на CI, ID к ⟨квадрату⟩ на ID [и перестановкой], ⟨квадрат⟩ же на BE соизмерим с ⟨квадратом⟩ на DI; значит, и составленное из квадратов на AE, EB соизмеримо с составленным из квадратов на CI, ID (предложение 16 книги V; предложение 11 книги X). Составленное же из квадратов на AE, EB рационально (предложение 76), значит, рациональным будет и составленное из квадратов на CI, ID (определение 4). Затем поскольку будет, что как ⟨квадрат⟩ на AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AE, EB, так и ⟨квадрат⟩ на CI к ⟨прямоугольнику⟩ между CI, ID (предложение 21, лемма), квадрат же на AE соизмерим с квадратом на CI, значит, и ⟨прямоугольник⟩ между AE, EB будет соизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID. ⟨Прямоугольник⟩ же между AE, EB медиален (предложение 76); медиален, значит, и ⟨прямоугольник⟩ между CI, ID (предложение 23, следствие); значит, CI, ID будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них рациональное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними медиальный.



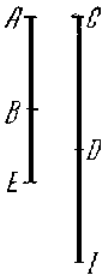
Черт. 115.

Значит, CD будет «меньшей» ⟨иррациональной⟩ (предложение 76), что и требовалось доказать.

Предложение 106

Соизмеримая с «образующей с рациональным целое медиальное» будет «образующей с рациональным целое медиальное».

Пусть будет «образующая с рациональным целое медиальное» AB и с AB соизмерима CD; я утверждаю, что и CD будет «образующей с рациональным целое медиальное» (черт. 116).



Черт. 116.

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BE; значит, AE, EB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на AE, EB медиальное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный (предложение 77). И устроим то же самое ⟨как выше⟩. Подобным же вот образом, как и раньше, докажем, что CI, ID будут в том же самом отношении с AE, EB, и составленное из квадратов на AE, EB будет соизмеримо с составленным из квадратов на CI, ID, ⟨прямоугольник⟩ же между AE, EB с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID, так что и CI, ID будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на CI, ID медиальное, ⟨прямоугольник⟩ же между ними рациональный.

Значит, CD будет «образующей с рациональным целое медиальное» (предложение 77), что и требовалось доказать.

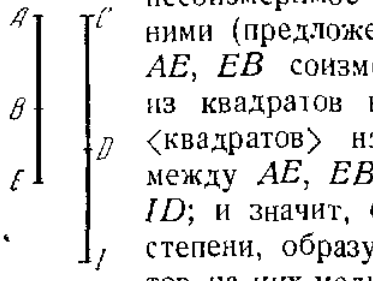
Предложение 107

Соизмеримая с «образующей с медиальным целое медиальное» и сама будет «образующей с медиальным целое медиальное».

Пусть будет «образующая с медиальным целое медиальное» AB и пусть с AB будет соизмерима CD; я утверждаю, что и CD будет «образующей с медиальным целое медиальное» (черт. 117).

Действительно, пусть сочетающаяся с AB будет BE, и устроим то же самое ⟨как выше⟩; значит, AE, EB будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное

из квадратов на них медиальное и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, и ещё составленное из квадратов на них несоизмеримое с ⟨прямоугольником⟩ между ними (предложение 78). И будут, как доказано, AE, EB соизмеримы с CI, ID и составленное из квадратов на AE, EB с составленным из ⟨квадратов⟩ на CI, ID, ⟨прямоугольник⟩ же между AE, EB с ⟨прямоугольником⟩ между CI, ID; и значит, CI, ID будут несоизмеримыми в степени, образующими составленное из квадратов на них медиальное и ⟨прямоугольник⟩ между ними медиальный, и ещё составленное из квадратов на них несоизмеримое с ⟨прямоугольником⟩ между ними.



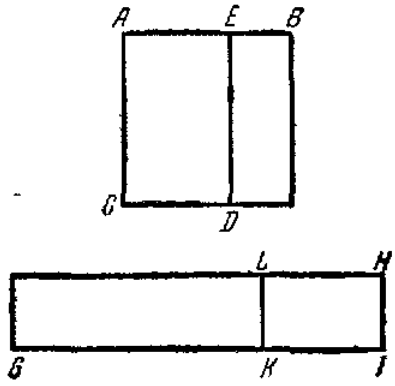
Черт. 117.

Значит, CD будет «образующей с медиальным целое медиальное» (предложение 78), что и требовалось доказать.

Предложение 108

При отнятии медиальной площади от рациональной квадрирующая остающуюся площадь бывает одной из двух иррациональных — или вычетом, или «меньшей».

Пусть отнимается медиальная ⟨площадь⟩ BD от рациональной BC; я утверждаю, что квадрирующая остающуюся ⟨площадь⟩ EC бывает одной из двух иррациональных — или вычетом или «меньшей» (черт. 118).



Черт. 118.

Действительно, отложим рациональную IH и приложим к IH равный ⟨площади⟩ BC прямоугольный параллелограмм HG, и отнимем HK равный ⟨площади⟩ DB; значит, остаток EC будет равен LG. Поскольку теперь ⟨площадь⟩ BC рациональна, BD же медиальна, и BC равна HG, BD ⟨же равна⟩ HK, то значит, HG будет рациональна, HK же

медиальна. И прилагаются они к рациональной IH; значит, ⟨прямая⟩ IG рациональна и соизмерима с IH линейно (предложение 20), IK же рациональна и несоизмерима с IH линейно (предложение 22); значит, IG будет несоизмеримой с IK линейно (предложение 13). Значит, IG, IK будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, KG будет вычетом (предложение 73), KI же — с ней сочетающейся. Тогда IG в квадратах будет больше IK или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой, или же нет.

Пусть сперва в квадратах она будет больше на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой. И вся GI будет соизмерима линейно с отложенной рациональной IH; значит, KG будет первым вычетом (определения третьи, 1). Квадрирующая же заключённую между рациональной и первым вычетом ⟨площадь⟩ будет вычетом (предложение 91). Значит, квадрирующая ⟨площадь⟩ LG, то-есть EC, будет вычетом.

Если же GI в квадратах будет больше IK на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, и вся IG будет линейно соизмерима с отложенной рациональной IH, то KG будет четвёртым вычетом. Квадрирующая же заключённую между рациональной и четвёртым вычетом ⟨площадь⟩ будет «меньшей» ⟨иррациональной⟩ (предложение 94), что и требовалось доказать.

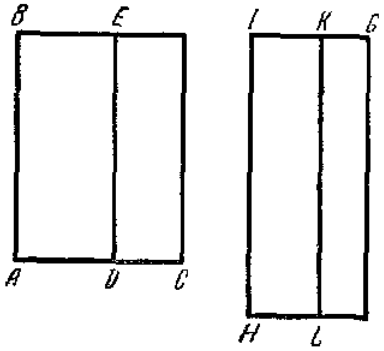
Предложение 109

При отнятии рациональной ⟨площади⟩ от медиальной возникают другие две иррациональные — или первый медиальный вычет, или образующая с рациональным целое медиальное.

Пусть от медиальной ⟨площади⟩ BC отнимается рациональная BD. Я утверждаю, что квадрирующая остаток EC бывает одной из двух иррациональных — или первым медиальным вычетом, или образующей с рациональным целое медиальное (черт. 119).

Действительно, отложим рациональную IH и подобным же образом ⟨как выше⟩ приложим площади. Тогда соответственно будут — IG рациональной и несоизмеримой с IH линейно, KI же рациональной и линейно соизмеримой с IH; значит, IG, IK будут рациональными, соизмеримыми только

в степени (предложение 13); значит, KG будет вычетом, IK же — сочетающейся с ней (предложение 73). Тогда GI в квадратах будет больше IK или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой.



Черт. 119.

Если теперь GI в квадратах будет больше IK на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и сочетающаяся IK будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной IH, то KG будет вторым вычетом (определения третьи, 2). Но IH рациональна; так что квадрирующая ⟨площадь⟩ LG, то-есть EC, будет первым медиальным вычетом (предложение 92).

Если же GI в квадратах будет больше IK на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой, и сочетающаяся IK будет линейно соизмеримой с отложенной рациональной IH, то KG будет пятым вычетом (определения третьи, 5); так что квадрирующая ⟨площадь⟩ EC будет образующей с рациональным целое медиальное (предложение 95), что и требовалось доказать.

Предложение 110

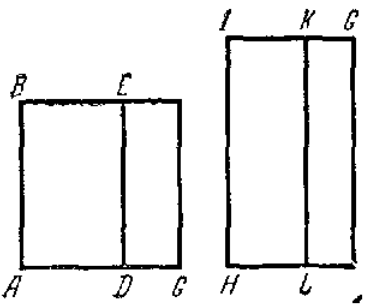
При отнятии от медиальной ⟨площади⟩ медиальной, несоизмеримой с целой, возникают остальные две иррациональные — или второй медиальный вычет, или образующая с медиальным целое медиальное.

Отнимем, как на ранее предложенных чертежах, от медиальной ⟨площади⟩ BC медиальную BD несоизмеримую с целой; я утверждаю, что квадрирующая EC будет одной из двух иррациональных — или вторым медиальным вычетом, или «образующей с медиальным целое медиальное» (черт. 120).

Действительно, поскольку каждая из ⟨площадей⟩ BC, BD медиальна, и BC несоизмерима с BD, то соответственно будет каждая из IG, IK рациональной и несоизмеримой с IH линейно (предложение 22). И поскольку ⟨пло-

щадь⟩ BC несоизмерима с BD, то-есть HG с HK, то и ⟨прямая⟩ GI несоизмерима с IK (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X); значит, IG, IK будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, KG будет вычетом (предложение 73), [IK же сочетающейся. Тогда IG в квадратах будет больше IK или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой, или на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой].

Вот если IG в квадратах будет больше IK на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и никакая из IG, IK не будет линейно соизмерима с отложенной рациональной IH, то KG будет третьим вычетом (определения третьи, 3). Но KL рациональна, прямоугольник же, заключающийся между рациональной и третьим вычетом, будет иррациональным, и квадрирующая его будет иррациональной, называется же вторым медиальным вычетом (предложение 93); так что квадрирующая ⟨площадь⟩ LG, то-есть EC, будет вторым медиальным вычетом.



Черт. 120.

Если же IG в квадратах будет больше IK на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой [линейно], и никакая из GI, IK не будет линейно соизмерима с IH, то KG будет шестым вычетом (определения третьи, 6). Квадрирующая же ⟨прямоугольник⟩ между рациональной и шестым вычетом будет «образующей с медиальным целое медиальное» (предложение 96). Значит, квадрирующая ⟨площадь⟩ LG, то-есть EC, будет «образующей с медиальным целое медиальное», что и требовалось доказать.

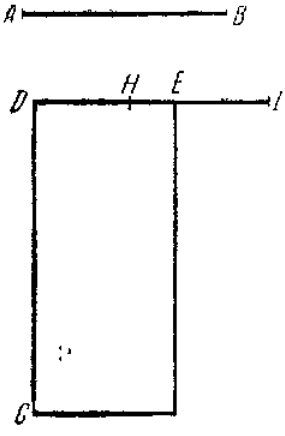
Предложение 111

Вычет не будет тождественным с биномиалью.

Пусть будет вычет AB; я утверждаю, что вычет не будет тождественным с биномиалью (черт. 121).

Действительно, пусть, если возможно, будет; и отложим рациональную DC и приложим к CD равный ⟨квадрату⟩

на AB прямоугольник CE, образующий ширину DE. Поскольку теперь AB вычет, DE будет первым вычетом (предложение 97). Пусть сочетающаяся с ним будет EI; значит, DI, IE будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и DI в квадратах будет больше IE на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и DI будет линейно соизмерима с отложенной рациональной DC (определения третьи, 1).



Черт. 121.

Затем, поскольку AB биномиаль, то значит, DE будет первой биномиалью (предложение 60). Разделим её на рационали в H, и пусть бо́льшая рациональ будет DH; значит, DH, HE, будут рациональными, соизмеримыми только в степени, и DH в квадратах будет больше HE на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и большая ⟨рациональ⟩ DH будет линейно соизмерима с отложенной рациональной DC (определения вторые, 1). Значит, и DI будет линейно соизмерима с DH (предложение 12); значит, и остаток HI будет линейно соизмерим с DI (предложение 15). [Поскольку теперь DI соизмерима с HI, DI же рациональна, то рациональной, значит, будет и HI. Поскольку теперь DI линейно соизмерима с HI], DI же несоизмерима линейно с EI (предложение 13), то значит, и IH будет линейно несоизмерима с EI (предложение 13). Значит, HI, IE [будут] рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, EH будет вычетом (предложение 73). Но вместе с тем и рациональной; это же невозможно.

Итак, вычет не будет тождественным с биномиалью, что и требовалось доказать.

[Следствие]

Вычет и ⟨идущие⟩ после него иррациональные не будут тождественными ни с медиалью, ни друг с другом.

Действительно, квадрат на медиали, приложенный к рациональной, образует шириной рациональную и линейно несоизмеримую с той, к которой он прилагается (предло-

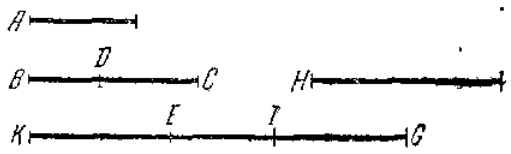
жение 22), ⟨квадрат⟩ же на вычете, приложенный к рациональной, образует шириной первый вычет (предложение 97), ⟨квадрат⟩ же на первом медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной второй вычет (предложение 98), ⟨квадрат⟩ же на втором медиальном вычете, приложенный к рациональной, образует шириной третий вычет (предложение 99), ⟨квадрат⟩ же на «меньшей», приложенный к рациональной, образует шириной четвёртый вычет (предложение 100), ⟨квадрат⟩ же на «образующей с рациональным целое медиальное», приложенный к рациональной, образует шириной пятый вычет (предложение 101), ⟨квадрат⟩ же на «образующей с медиальным целое медиальное», приложенный к рациональной, образует шириной шестой вычет (предложение 102). Поскольку теперь упомянутые ширины отличаются как от первой, так и друг от друга, — от первой потому, что она рациональна, между собой же потому, что они не одни и те же по рангу, — то ясно, что и сами эти иррациональные отличаются друг от друга. И поскольку доказано, что вычет не является тождественным с биномиалью, ⟨следующие⟩ же за вычетом иррациональные, приложенные к рациональной, образуют ширинами вычеты, каждая соответственного ранга, ⟨следующие⟩ же за биномиалью ⟨образуют⟩ биномиали и тоже соответственного ранга, то значит, различными будут и ⟨следующие⟩ за вычетом, и ⟨следующие⟩ за биномиалью, так что по рангу будет всех иррациональных 13:

медиаль,
биномиаль,
первая бимедиаль,
вторая бимедиаль,
бо́льшая ⟨иррациональная⟩,
рационально и медиально квадрирующая,
бимедиально квадрирующая,
вычет,
первый медиальный вычет,
второй медиальный вычет,
меньшая ⟨иррациональная⟩,
образующая с рациональным целое медиальное,
образующая с медиальным целое медиальное (61).

[Предложение 112

⟨Квадрат⟩ на рациональной, приложенный к биномиали, образует шириной вычет, рационали которого соизмеримы с рационалями биномиали и в том же самом отношении и ещё возникающий вычет будет иметь тот же самый ранг, что биномиаль (62).

Пусть рациональная будет A, биномиаль же BC, большая рациональ которой пусть будет DC, и ⟨квадрату⟩ на A пусть будет равен ⟨прямоугольник⟩ между BC, EI; я



Черт. 122.

утверждаю, что EI будет вычетом, рационали которого будут соизмеримы с CD, DB и в том же самом отношении, и ещё, что EI будет иметь тот же самый ранг, что BC (черт. 122).

Действительно, пусть опять ⟨квадрату⟩ на A будет равен ⟨прямоугольник⟩ между BD, H. Поскольку теперь ⟨прямоугольник⟩ между BC, EI равен ⟨прямоугольнику⟩ между BD, H, то значит, будет, что как CB к BD, так и H к EI (предложение 16 книги VI). Но CB больше BD; значит, и H будет больше EI (предложения 14, 16 книги V). Пусть EG будет равна H; значит, будет, что как CB к BD, так и GE к EI; значит, «выделяя» (предложение 17 книги V), будет, что как CD к BD, так и GI к IE. Сделаем, чтобы как GI к IE, так ⟨было бы⟩ и IK к KE; и, значит, вся GK ко всей KI будет, как IK к KE; ибо, как один из предыдущих к одному из последующих, так и все предыдущие ко всем последующим (предложение 12 книги V). Как же IK к KE, так будет и CD к DB; и, значит, как GK к KI, так и CD к DB. ⟨Квадрат⟩ же на CD соизмерим с ⟨квадратом⟩ на DB (предложение 36); значит и ⟨квадрат⟩ на GK будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на KI (предложение 20,

книги VI, следствие; предложение 11 книги X). И будет, что как ⟨квадрат⟩ на GK к ⟨квадрату⟩ на KI, так и GK к KE, поскольку три ⟨прямые⟩ GK, KI, KE будут пропорциональны (определение 9 книги V). Значит, GK линейно соизмерима с KE (предложение 11); так что и GE будет линейно соизмерима с EK (предложение 15). И поскольку ⟨квадрат⟩ на A равен ⟨прямоугольнику⟩ между EG, BD, ⟨квадрат⟩ же на A рационален, то значит, рационален будет и ⟨прямоугольник⟩ между EG, BD. И прилагается он к рациональной BD; значит, и EG будет рациональной и линейно соизмеримой с BD (предложение 20); так что и соизмеримая с ней EK будет рациональной (определение 3) и линейно соизмеримой с BD (предложение 12). Поскольку теперь будет, что как CD к DB, так и IK к KE, а CD, DB соизмеримы только в степени, то и IK, KE будут соизмеримы только в степени (предложение 11). Но KE рациональна; рациональной, значит, будет и IK. Значит, IK, KE будут рациональными, соизмеримыми только в степени; значит, EI будет вычетом (предложение 73).

В квадратах же CD будет больше DB или на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, или же на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой.

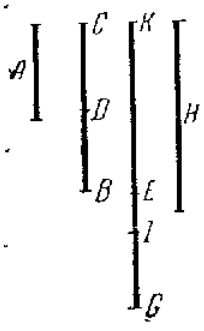
Если теперь CD в квадратах будет больше DB на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой [с собой], то и IK в квадратах будет больше KE на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 14). И если CD будет линейно соизмерима с отложенной рациональной, то и IK (предложения 11, 12); если же BD, то и KE (предложение 12); если же никакая из CD, DB, то и никакая из IK, KE.

Если же CD в квадратах больше DB на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, то и IK в квадратах будет больше KE на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение 14). И если CD соизмерима будет линейно с отложенной рациональной, то и IK; если же BD, то и KE; если же никакая из CD, DB, то и никакая из IK, KE; так что IE будет вычетом, рационали IK, KE которого соизмеримы с рационалями CD, DB биномиали, и в том же отношении, и ⟨IE⟩ имеет тот же самый ранг что и BC (определения вторые и третьи); что и требовалось доказать.

Предложение 113

<Квадрат> на рациональной, приложенный к вычету, образует шириной биномиаль, рационали которой соизмеримы с рационалями вычета и в том же самом отношении, ещё же возникающая биномиаль имеет тот же самый ранг, что и вычет.

Пусть рациональная будет A, вычет же BD, и <квадрату> на A пусть будет равен <прямоугольник> между BD, KG, так что <квадрат> на рациональной A, прилагаемый к вычету BD, образует ширину KG; я утверждаю, что KG будет биномиалью, рационали которой соизмеримы с рационалями BD, и в том же самом отношении, и ещё, что KG имеет тот же самый ранг, что и BD (черт. 123).



Черт. 123.

Действительно, пусть сочетающаяся с BD будет DC; значит, BC, CD будут рациональными, соизмеримыми только в степени (предложение 73). И пусть <квадрату> на A будет равен и <прямоугольник> между BC, H. <Квадрат> же на A рационален; рационален, значит, и <прямоугольник> между BC, H. И приложен он к рациональной BC; значит, и H будет рациональной и линейно соизмеримой с BC (предложение 20). Поскольку теперь <прямоугольник> между BC, H равен <прямоугольнику> между BD, KG, то значит, будет (предложение 16 книги VI) пропорция — как CB к BD, так и KG к H. Но BC больше BD; значит, и KG больше H (предложения 14, 16 книги VI). Отложим KE равною H; значит, KE будет линейно соизмерима с BC. И поскольку будет, что как CB к BD, так и GK к KE, то, «переворачивая» (предложение 19 книги V, следствие), значит, будет, что как BC к CD, так и KG к GE. Сделаем, чтобы как KG к GE, так <было бы> и GI к IE; значит, и остаток KI будет к IG, как KG к GE, то-есть [как] BC к CD (предложение 19 книги V). Но BC, CD соизмеримы только в степени; значит, и KI, IG будут соизмеримыми только в степени (предложение 11). И поскольку будет, что как KG к GE, <так и> KI к IG,

но как KG к GE, ⟨так и⟩ GI к IE, и, значит, как KI к IG, ⟨так и⟩ GI к IE; так что и как первое к третьему, ⟨так и квадрат⟩ на первом к ⟨квадрату⟩ на втором (определение 9 книги V); и значит, как KI к IE, так и ⟨квадрат⟩ на KI к ⟨квадрату⟩ на IG. ⟨Квадрат⟩ же на KI соизмерим с ⟨квадратом⟩ на IG; ибо KI, IG соизмеримы в степени; значит, и KI будет линейно соизмерима с IE (предложение 11); так что KI [будет] линейно соизмерима и с KE (предложение 15). Но KE рациональна и линейно соизмерима с BC; значит, и KI рациональна и линейно соизмерима с BC (предложение 12). И поскольку будет, что как BC к CD, так и KI к IG, то «перестановкой» (предложение 16 книги V), как BC к KI, так и DC к IG. Но BC соизмерима с KI; значит, и IG линейно соизмерима с CD (предложение 11). Но BC, CD рациональные, соизмеримые только в степени; значит, и KI, IG будут рациональными (определение 3), соизмеримыми только в степени (предложение 13); значит, KG будет биномиалью (предложение 36).

Если теперь BC в квадратах больше CD на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, то и KI в квадратах будет больше IG на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой (предложение 14). И если BC будет соизмерима линейно с отложенной рациональной, то и KI (предложение 12), если же CD соизмерима будет линейно с отложенной рациональной, то и IG, если же никакая из BC, CD, то и никакая из KI, IG (предложение 13).

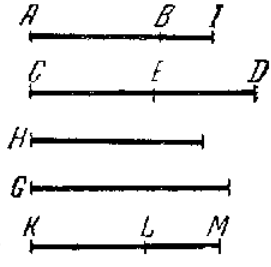
Если же BC в квадратах больше CD на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой, то и KI будет в квадратах больше IG на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой с собой (предложение **14**). И если BC соизмерима будет линейно с отложенной рациональной, то и KI, если же CD, то и IG (предложение 12), если же никакая из BC, CD, то никакая из KI, IG.

Значит, KG будет биномиалью, рационали KI, IG которой соизмеримы с рационалями BC, CD вычета и в том же самом отношении, и ещё KG будет иметь тот же самый ранг, что и BC (определения вторые и третьи); что и требовалось доказать (63).

Предложение 114

Если площадь заключается между вычетом и биномиалью, рационали которой соизмеримы с рационалями вычета и в том же самом отношении, то квадрирующая эту площадь будет рациональна.

Пусть площадь между AB, CD заключается между вычетом AB и биномиалью CD, бо́льшая рациональ которой пусть будет CE, и пусть рационали CE, ED биномиали будут соизмеримы с рационалями AI, IB вычета и в том же самом отношении, и пусть квадрирующая ⟨прямоугольник⟩ между AB, CD, будет H; я утверждаю, что H будет рациональной (черт. 124).



Черт. 124.

Действительно, отложим рациональную G и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на G ⟨площадь⟩, образующую ширину KL; значит, KL будет вычетом, рационали которого пусть будут KM, ML, соизмеримые с рационалями CE, ED биномиали и в том же самом отношении (предложение 92). Но и CE, ED соизмеримы с AI, IB и в том же самом отношении; значит, будет, что как AI к IB, так и KM к ML. «Перестановкой» (предложение 16 книги V), значит, будет, что как AI к KM, так и BI к LM, значит, и остаток AB будет к остатку KL, как AI к KM (предложение 19 книги V). Но AI соизмерима с KM (предложение 12); значит, и AB будет соизмерима с KL (предложение 11). И как AB к KL, так и ⟨прямоугольник⟩ между CD, AB к ⟨прямоугольнику⟩ между CD, KL (предложение 1 книги VI); значит, и ⟨прямоугольник⟩ между CD, AB будет соизмерим с ⟨прямоугольником⟩ между CD, KL (предложение 9). ⟨Прямоугольник⟩ же между CD, KL равен ⟨квадрату⟩ на G; значит, ⟨прямоугольник⟩ между CD, AB будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на G. ⟨Прямоугольнику⟩ же между CD, AB равен ⟨квадрат⟩ на H; значит, ⟨квадрат⟩ на H соизмерим с ⟨квадратом⟩ на G. ⟨Квадрат⟩ же на G рационален; рационален, значит, будет и ⟨квадрат⟩ на H;

значит, рациональна будет и H. И она квадрирует ⟨прямоугольник⟩ между CD, AB.

Итак, если площадь заключается между вычетом и биномиалью, рационали которой соизмеримы с рационалями вычета и в том же самом отношении, то квадрирующая эту площадь будет рациональна.

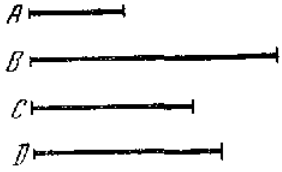
Следствие

И сделалось нам вследствие этого ясно, что рациональная площадь может заключаться между иррациональными прямыми. Что и требовалось доказать.

Предложение 115

Из медиали возникают в бесконечном множестве иррациональные, и никакая никакой из предыдущих не тождественна.

Пусть будет медиаль A; я утверждаю, что из A возникают в бесконечном множестве иррациональные, и никакая никакой из предыдущих не тождественна (черт. 125).



Черт. 125.

Отложим рациональную B, и пусть ⟨прямоугольнику⟩ между B, A равен будет ⟨квадрат⟩ на C; значит, C будет иррациональной (определение 4); ибо ⟨прямоугольник⟩ между иррациональной и рациональной будет иррациональным (предложение 20). И она никакой из предыдущих не тождественна; ибо ⟨квадрат, построенный⟩ на любой из предыдущих, будучи приложен к рациональной, не образует шириной медиаль. Затем, вот пусть ⟨прямоугольнику⟩ между B, C будет равен ⟨квадрат⟩ на D; значит, ⟨квадрат⟩ на D

будет иррациональным (предложение 20). Значит, D будет иррациональна (определение 4); и никакой из предыдущих не тождественна; ибо ⟨квадрат, построенный⟩ на любой из предыдущих, будучи приложен к рациональной, не образует шириной C. Подобным же вот образом, при продвижении такого же строя до бесконечности, очевидно, из медиали возникают в бесконечном множестве иррациональные, и никакая никакой из предыдущих не тождественна; что и требовалось доказать] (64, 65).

КОММЕНТАРИИ

Д. Д. Мордухай-Болтовского

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ VII.

1. Единица. Для Евклида единица ещё *не число*. Она занимает особое положение в Арифметике, и поэтому то̀, что доказано для числа вообще, для единицы приходится доказывать особо. Так и поступает Евклид, доказывая сперва, что если $a:b=c:d$, то $a:c=b:d$, а затем снова, что если $1:a=c:d$, то $1:c=a:d$.

На вопрос, что̀ такое единица, Евклид даёт неясное определение. Число — множество, составленное из единиц. Единица же — это *что-то*, вследствие чего существующее является единым. (Μονάς ἐστιν, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν ὄντων ἓν λέγεται.) Это определение, конечно, столь же логически мёртвое, как евклидово определение точки, оно тоже по существу является отрицательным.

Чисто метафизические определения пифагорейцев, наоборот, положительны[1]). Согласно пифагорейцам[2]), единица — «граница между числом и частями», т. е. между целыми числами и дробями, причём прибавляется, что она «семя и вечный корень», «то̀, с обеих сторон чего отношения возрастают», т. е. единица является общей границей рядов 1, 2, 3, 4, ... и $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$

Другие определяют единицу как границу малости. Это что-то вроде *нашей низшей грани*, не принадлежащей уже множеству, но определяющей то, ниже чего не могут опуститься его элементы.

Теон Смирнский[3]) выдвигает единицу как определяющую границу некоторой операции, именно вычитания: из единицы уже нельзя вычесть никакого целого числа.

---

[1]) Heath T. L., The thirteen Books of Euclid's Elements, Cambridge, 1926, vol. II, Book VII, стр. 279.

[2]) Cantor M., Vorles. über Gesch. der Math., Bd. I, Leipzig, 1907.

[3]) Theonis Smyrnaei philosophi platonici expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem utilium, ed. Hiller, Leipzig, 1878.

Аристотель [4]) подчёркивает *неделимость* единицы: «Единица — это неделимое в категории количества». Он указывает на отличие арифметической единицы от точки, которая, являясь аналогичным элементом, имеет *положение*. Единица им называется *точкой без положения*.

Ямблих [5]) определяет единицу как «*форму форм*», вследствие того, что единица потенциально содержит все формы числа: плоскостные, телесные и т. д. Это определение сближается с современным и *логистическим* (Рассселя) [6]) определением числа как *класса эквивалентных классов*.

Античные авторы очень резко подчёркивают, что единица во всяком случае *не число*. Мы находим это утверждение не только у Аристотеля, но и значительно позже у Теона, у Марциана Капеллы [7]), у Боэция.

На той же точке зрения стоят и арабские математики. Для Бен-Музы единица — общий корень чисел, но *не число*. То же говорит Пселл [8]). Даже Беха-Эддин [9]) — составитель арабского учебника XVI века — говорит то же.

Можно сказать, что только средние века дали единице право гражданства. Оресм [10]) определённо говорит, что *единица — истинное число*. Утверждение, что единица — число, защищается Рамусом [11]), а за ним Стевином [12]).

Аргументы Стевина следующие:

1) Части той же природы, что целое; поэтому, если целое — число, то единицы — числа. Единица часть совокупности единиц или множества, а потому той же природы, что и это множество.

2) Если из данного числа вычитается то, что не является числом, т. е. никакое число, то число остаётся тем же. Но если из числа вычесть единицу, то остаётся другое число.

---

[4]) Aristoteles, Metaphysica (русск. пер. А. В. Кубицкого, М.-Л., 1934).

[5]) Iamblichus, Introductio in Nicomachi arithmeticam, ed. Tennulisis, Arnhein, 1668.

[6]) Russel (and Whitehead), Principia Mathematica, Cambridge 1910—1913.

[7]) Martianus Capella, De nuptiis Philologiae et Mercurii et de septem artibus liberalibus, ed. Kopp, 1836, Frankf. a. M.

[8]) Psellus, Compendium Mathematicum Bataviae, 1647.

[9]) Becha-Eddin, Essenz der Rechenkunst (Nesselman), Berlin, 1843.

[10]) Oresmus в «Bibliotheca Mathematica» 143 (1914 г.), стр. 234.

[11]) Ramus P., Scholarum mathematicarum libri unus et triginta, Basel, 1569.

[12]) Stevin S., Les Oeuvres Mathématiques ... par A. Girard, Leyde, 1634.

Интересны возражения, например, Лауренберга против этой аргументации[13]). Он отвечает, что основное положение об однородности части с целым не всегда правильно, потому что существуют два рода вещей: similares (подобно составленные) и dissimilares (неподобно составленные). К первым он относит воду, золото и т. п., так как части воды или золота будут также водой или золотом. Но часть головы вовсе не голова, часть дерева не дерево, часть человека не человек. Таково и число три. Оно по природе отличается от единицы. Если из целого отнять единицу, то, действительно, не останется того, что было. Но если отнять из неподобно составленного часть, то также не останется того, что было. Таким же образом, единица не число, но отнятие её от числа уменьшает его.

2. Единица и точка. Следует отметить, что монада (Μόνας) не вполне точно переводится как *«единица»*. — В античной мысли под это понятие подводилась как арифметическая единица (числовая единица), так и точка. «Точка есть единица, имеющая положение, единица есть точка без положения» (Аристотель).

Различие природы единицы и точки является предметом схоластических рассуждений. Оно заключается в том, что:

1) единица есть часть, образующая число, а точка не образует никакой величины; из точек, как учил Брадвардин[14]), не составляется линия;

2) всякая единица делится на дробные части, а точка неделима;

3) единица начинает и кончает всякое число, а точка не начинает, а только ограничивает линию.

3. Нуль. За единицей отвоевывает себе право гражданства нуль. Но он ещё дольше, чем рациональная дробь, остаётся в положении неполноправного. С ним обращаются, как с числом, но его не признают числом. При решении уравнений Диофант[15]) не знает корней, равных нулю. То же следует сказать и об арабских математиках, например, Аль-Кархи[16]). До Жирарда[17]) и Декарта[18])

---

[13]) Laurenbergerus, Institutiones arithmeticae (Totius Mathematicae corpus, I), Гамбург, 1624.

[14]) Bradwardinus Th., Geometria speculativa, Lutetiae, 1496.

[15]) Th. L. Heath, Diophantus of Alexandria, Cambridge, 1910. Diophantus Alexandrinus, Arithmeticorum liori VI cum comment. Bachet et observationes P. de Fermat, Tolosiae, 1670.

[16]) Alkarhi, Extrait du Fakhri, ed. Woepke, Paris, 1853. Alkafi fi'l hisab, ed. Hochheim, Magdeburg, 1873—1880.

[17]) Girard A., Invention nouvelle en l'Algèbre, Amsterdam, 1629.

[18]) René Descartes, La Géometrie (приложение к «Discours de la méthode...», Leyde, 1637). Есть русский перевод с примеч. А. П. Юшкевича (М.-Л., 1938), сделанный с франц. издания собр. соч. Декарта, выпущенного Ш. Адамом и П. Таннери (Paris, 1897—1910).

и европейские математики, например, Шюкэ, тоже не признают таких корней.

Но это не мешает математикам оперировать с нулём, как с числом, так же, как неполноправность единицы не мешает Евклиду вводить ее в пропорции и оперировать с ней, как с числом.

Никомах[19]) ставит правило: «нуль, сложенный с нулём, дает *нуль*».

Знак нуля, как известно, впервые введён индусами, и с ним производятся формальные операции так же, как и с другими числовыми знаками *).

Даже во второй половине XVII века Валлис[20]) вооружается против числовых прав нуля. Ведь нуль не отвечает на вопрос: *сколько?* Он только выражает отрицание, снимает некоторый субъект, а вовсе не указывает, *сколько единиц*. Можно спросить: сколько кристаллических сфер? и дать ответ: нуль. Но этот ответ не будет прямым ответом на вопрос, а только отрицанием возможности ответа.

Но, превращаясь в число, нуль оказывается всё-таки каким-то *исключительным* числом, которое можно складывать, вычитать, на которое можно умножать. Возможность введения нуля в операцию *деления* или отрицалась, или принималась с ограничением в каком-то новом понимании.

В таком же положении оказались отношение и дробь, в которые входил нуль: $0:a$ оказывалось равным нулю, а $a:0$ и $\frac{a}{0}$ равными ∞, причём даже у индусских математиков (у Кришны, комментатора Бхаскары[21]). Но если отношение $a:b$ оказывалось равным бесконечности, то вовсе не выводилось отсюда, что b есть нуль, а только то, что оно *не принадлежит к тому же роду величин*.

Кардан[22]) выставляет следующую аксиому: *То, к чему величина имеет бесконечное отношение, не заключается в её роде.* Я отсылаю читателя к моему комментарию об угле касания (комментарий 17 к кн. III). Из него можно видеть, откуда у Кардана явилась такая аксиома. Отношение прямолинейного угла к углу касания представляется Кардану на основании предложения 16

---

[19]) Nicomachi Geraseni, Introductionis Arithmeticae libri II, ed. Hoche, Lipsiae, 1866 (только греч. текст).

*) Нуль впервые введен вавилонскими математиками приблизительно после 300 г. до н. э. (*Прим. ред.*)

[20]) J. Wallis, Mathesis Universalis sive arithmetica (Opera math., I, 1695).

[21]) Bhaskara, Vijaganita, ch. I (в книге: H. Th. Colebrooke, Algebra with Arithmetics and Mensuration from the Sanscrit of Brahmagupta and Bhâskara, London, 1817).

[22]) Cardanus, De subtilitate, 1550—54—60. De scientiis libri 16.

книги III бесконечным, но он не мыслит, как Пелетарий[23]), угол касания нулём.

Отношение $a:b=0:0$ при понимании a и b не как актуально *бесконечно малых* или как *исчезающих* и *возникающих* чисел в смысле Ньютона[24]), а как *чистых нулей*, выступает только в XVIII веке в исчислении нулей, которое Эйлер[25]) и другие математики стараются поставить на место теории пределов. Они считают возможным существование *равенства величин* без равенства отношений:

когда $2x=0$, то $3x=0$ и $2x=3x$, но $2x:3x=0:0=2:3$.

4. Определение числа. Евклид определяет только целое число, так как *дробь для него ещё не число.*

Число — это *множество, составленное из единиц.* Конечно, *множество* здесь понимается не в *нашем смысле*; во всяком случае, оно не может быть *бесконечным.* Я думаю, оно понималось только в смысле собрания, конечной совокупности.

Аристотель определяет число как «множество единиц», «множество неделимых», «несколько единиц». По структуре число — это «*ограниченное* множество», «множество, измеряемое единицей» (дробь единицей не измеряется, а потому уже и не представляет числа), затем — «множество мер», т. е. единиц; как характерный признак элемента выступает не его неделимость, но способность служить мерой для числа.

У других авторов вплетается в чисто *кардинальное* (т. е. количественное) определение целого числа Аристотеля и Евклида мотив ординального (т. е. порядкового) числа.

По Никомаху[26]), число — это «собрание единиц, *поток количества, составленный из единиц*».

Стобей[27]) сообщает, что по определению пифагорейца Модерата число есть «собрание единиц или прогрессия величин, начинающаяся с единицы и кончающаяся единицей».

5. Кардинальные и ординальные числа. Различают количественное и порядковое числа; первое отвечает на вопрос: *сколько*?, второе же — на вопрос: *который*?

Пять, шесть, десять означают количественные числа; пятый, шестой, десятый — порядковые. Первые называют *кардинальными*, вторые — *ординальными* числами.

Различные математики отдают приоритет то кардинальному, то ординальному числу, исходя из методической, исторической

---

[23]) Peletarius, Elementa Euclidis, 1557 (III 15—16 стр. 297).

[24]) Newton, Arithmetica universalis, 1707. И. Ньютон, Всеобщая арифметика или книга об арифметических синтезе и анализе, пер. и прим. А. П. Юшкевича, АН СССР, 1948.

[25]) Euler L., Institutiones Calculi Differentialis, 1755 (издано Петербургской Академией Наук). См. русск. пер. М. Я. Выгодского.

[26]) См. примеч. 19.

[27]) Stobaeus, Eclog. Phys. I, 1, 8.

или логической точек зрения. Рассуждают о том, как следует приступать к ознакомлению ребёнка с числами: через *числовые фигуры*, научая его непосредственно воспринимать небольшие множества единиц и их структуру, или же начинать *со счёта*.

Такой же вопрос можно ставить и о прошлом человечества, о происхождении числа, на основании устной нумерации некультурных народов.

Затем можно спорить о том, следует ли, стараясь логически обосновать арифметику, итти по пути ординального числа, выводя число *из счёта* (как Гельмгольц [28]) и Грассман [29]), или же по пути кардинального (как логисты) [30]).

Конечно, в своём определении Евклид стоит на точке зрения кардинального числа: число есть собрание единиц. В это определение *порядок* не входит. Но он, как мы выше видели, в некоторой мере входит в другие античные определения числа.

Бесспорно, тонкий анализ понятий средневековых схоластиков привёл к различению этих понятий.

Мавролик [31]), стоящий на границе, отделяющей средневековую мысль от рационалистической, сближает эти понятия, выявляя уже вполне определённо две точки зрения на число: *кардинальную* и *ординальную*.

Он устанавливает наряду с числом ещё понятие о *корне* (radix). Корни получаются из единицы прибавлением единиц. Этим Мавролик хочет сказать только то, что они получаются *счётом*, т. е. он мыслит эти корни как порядковые (ординальные) числа. При этом он мыслит квадрат как *произведение двух ординальных чисел*, т. е. как единицы, расположенные в определённом порядке: на первом месте 1, 2, 3, 4, на втором 5, 6, 7, 8, на третьем 9, 10, 11, 12, на четвёртом 13, 14, 15, 16.

Мавролик при этом высказывает следующее положение: *По тому, сколько имеет какое-либо число единиц, оно занимает определённое место в порядке корней*. И то, разъясняет Мавролик, корень, начинаясь с единицы, принимает переход от одного числа к другому по единице, вследствие чего число тысяча (millenarius), состоя из тысячи единиц, является тысячным (millesimus), и, обратно, число тысячное (millesimus) в порядке корней, содержит тысячу единиц, т. е. представляет тысячу (millenarius).

Евклид мыслит n^2 только как плоское число; с n^2 у него тесно связан образ квадрата, построенного на отрезке, выражаемом целым числом, и поэтому он не рассматривает чисел, выражаемых

---

[28]) Helmholtz, Zählen und Messen, 1887. Гельмгольц, Счёт и измерение, Казань, 1893.

[29]) Grassman H., Lehrbuch der Arithmetik, Berlin, 1861.

[30]) Couturat L., Les principes des mathématiques, Paris, 1905. Л. Кутюра, Философские принципы математики, СПБ, 1913.

[31]) Franciscus Maurolycus, Arithmeticae libri duo (Opuscula Mathematica, Venetiis, 1575).

формулой n^2+n. Чтобы мыслить n^2+n, следует мыслить и n и n^2 как числа *абстрактные*. Мавролик их так и мыслит. Он даёт *риторическую* формулу, символически выражаемую равенством $n^2+n=n(n+1)$, говоря, что квадрат вместе с корнем равен произведению числа на следующее за ним.

6. Виды количества. Следует евклидово определение числа продумать в связи с тем, что даёт Аристотель, бесспорно имевший влияние на «Начала».

Аристотель[32]) отличает величины, составленные из частей, имеющих взаимное расположение, от величин, состоящих из частей без взаимного расположения. К первым он относит линии, поверхности, тела, а ко вторым — число и время. Такое деление совпадает с делением на пространственные и непространственные. Но эта классификация вовсе не совпадает с другой, в которой количества делятся на непрерывные и дискретные (continua dissecta), причём к первому классу относятся линии, поверхности, тела, ко второму — число. Третье аристотелевское деление — на остающиеся (permanens) и последовательные (successiva). Первые — те, которых части существуют в одно и то же время, как, например, прямая линия; вторые — те, части которых находятся в постоянном течении, как время.

В первой классификации Аристотель может отнести ко второму роду только *целое* число, но в будущем этот род пополняется дробными рациональными и, наконец, иррациональными. Во второй классификации *непрерывная* геометрическая величина противополагается прерывному целому числу. В далёком будущем арифметизация математики разрушит эту перегородку, устанавливая непрерывность числа. Наконец, третья классификация даёт источник идеи, противополагающей *постоянное переменному*.

Время в раннем периоде развития математического анализа является *первым* независимым переменным (например, у Ньютона).

7. Деление и измерение. Евклид определяет часть непрерывной величины (определение 1 книги V) и дискретной (определение 3 книги VII) совершенно в тех же словах.

Я считаю, что Петрушевский[33]) искажает смысл, переводя так: меньшее число называется частным большего, когда оно *содержится* в большем. Можно ещё допустить слово *частное*, если понимать его так, как этот термин понимался в 1835, а не в 1949 году, но отождествлять *содержание* с *измерением*, понимая содержание как в старом смысле (т. е. отношения), так и в современном, я считаю недопустимым. Можно сказать, что 2 содержится в 5; ведь между ними существует определённое

---

[32]) Aristoteles, Categoriae, cap. 6 (есть русск. пер. А. В. Кубицкого, М., 1939).

[33]) Петрушевский Ф., Евклидовых начал три книги: седьмая, осьмая и девятая .... пер. с греч., СПБ, 1835.

отношение, которое во времена Петрушевского называлось содержанием.

Но Евклид мыслит, не отрешаясь от геометрических образов: отрезок, равный 2, не укладывается целое число раз в 5, но укладывается в 6, — значит, 2 измеряет 6, но не измеряет 5.

Несколько ближе к евклидовскому смыслу было бы сказать: *делит*. Действительно, мы иногда употребляем выражение: «отрезок делится на отрезок», но это оттого, что мы, обратно тому, что делает Евклид, *мыслим отрезок числом* и, производя операцию деления, в результате получаем целое число. Евклид этой операции не производит: формуле $a = bc$ у него отвечает следующее: отрезки, отвечающие трём целым числам a, b, c, таковы, что b укладывается в a столько раз, сколько единиц (длины) содержится в c или, как говорит Евклид, «измеряет a *по единицам* c» (лучше было бы сказать — по числу единиц c).

Только после этого пояснения нам станет понятным, почему Евклид не доказывает во II или V книгах *коммутативный* закон умножения, а доказывает его в VIII книге. Когда строится прямоугольник на b и c, то, конечно, безразлично, что́ принять за его *высоту*, что́ за *основание*; что заключено между b и c, будет также и между c и b. Но когда b измеряет a числом единиц в c, то совершенно неочевидно, что c измеряет a числом единиц в b, так как роли b и c уже совершенно различны.

8. Аликвотные и аликвантные части. Термин «деление» понимают двояким образом: или в смысле *разложения числа на равные* части (что отвечает евклидову «измерению»), или в смысле дробления на части не обязательно равные. То, что соединение их даёт данное число, выражается аксиомой: «целое равно всем своим частям вместе взятым», которой комментаторы обычно пополняют систему аксиом I книги «Начал», относя эту аксиому как к непрерывным, так и к дискретным величинам.

Если B получается из A повторением целое число раз, так что B разбивается на целое число частей A, то A будет то, что Евклид называет *частью* и что другие называют частью *аликвотной*. Если же взять просто такие числа $A_1, A_2, \ldots$, что $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = B$, то будем иметь «*части*» B: $A_1, A_2, \ldots, A_n$; в отличие от аликвотных, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ суть части *аликвантные*.

Ещё Лейбниц поставил задачу об аликвантных частях (в письме к Ивану Бернулли в 1669 г.), спрашивая, сколькими способами данное число можно разложить на две, три или более аликвантных частей. Эйлер[34]), занимаясь этим вопросом, даёт приёмы для определения этого числа.

---

[34]) Euler, Introductio in Analysin infinitorum, I, Лозанна, 1748. Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно малых, I, пер. под ред. С. Я. Лурье, Москва, 1936.

9. Дроби. У Евклида нет дробей. Дроби у греков, говорит Тропфке[35]), понимаются не как *абстрактные дробные числа*, но скорее как *конкретные единицы низшего порядка*, а именно, части мер веса, не теряя характера целых чисел. Абстрактная же дробь заменяется *отношением* целых чисел, применение которого основывается на высоко развитой теории пропорций. Только у Диофанта выступают в Арифметике, наряду с целыми, и дробные числа.

Но было бы неправильно отсюда выводить, что в эпоху Евклида и до Евклида не было дробей, следует только сказать, что дроби не входили в Арифметику как *учение о числах*; ими занималась Логистика, т. е. искусство вычисления. При Евклиде она не складывалась в строго логические формы.

Архимед[36]), задавшийся целью логического обоснования не только геометрических положений, но и некоторых, имевших практическое значение расчётов, пользуется дробями по правилам Логистики.

Применение дробей к вычислениям находим ещё в древнем папирусе Ахмеса[37]) (за 2000—1700 л. до н. э.). Там мы находим особенные, чуждые нам операции над дробями. Папирус оперирует *долями*, т. е. дробями с числителями, равными 1, и все действия над дробями производятся предварительным сведением их к долям[38]). Этого рода исчисление перешло от египтян к грекам, а затем к арабам. Так как в *доле* числитель всегда равен 1, то египтяне могли изображать дробь, ставя просто точку над знаменателем. Греки заменяли точку коммой[39]).

Дробь долго остаётся в положении какого-то *неполноправного* числа. С одной стороны, с ней обращаются, как с числом; у Клавия и других комментаторов Евклида она становится предметом Арифметики. Но, с другой стороны, всегда подчёркивается, что дробь (при тех же законах формальных операций, что и с целыми числами) не является в *собственном* смысле числом.

По мнению Валлиса[40]), она отвечает не на вопрос: «сколько» (quot), а на вопрос: «сколь *велико*» (quantum), дроби относятся к величинам не *дискретным*, а *непрерывным*.

---

[35]) Tropfke, Gesch. der Elementar-Math., Bd. I.

[36]) Archimedis opera omnia cum comment. Eutocii, ed. Heiberg, I, 1910.

[37]) Eisenlohr A., Ein mathematisches Handbuch der alten Aegypter, Leipzig, 1877.

[38]) Tannery P., Memoires scientifiques; Scinces exactes dans l'antiquité, t. II.

[39]) Кэджори Ф. (Cajori Fl.), История элементарной математики, Одесса, 1917.

[40]) Wallis, Mathesis universalis sive Arithmeticum opus integrum (Opera, Oxford, 1657).

10. Отношение и дробь. В современных методических руководствах, начиная с Лакруа[41]), замечается тенденция к *отождествлению отношения с результатом деления*. Серре[42]) в курсе Арифметики говорит, что отношением одного числа к другому называется *частное* от деления первого на второе. При этом частное мыслится не только как целое, но и как дробное, и даже как иррациональное число.

Здесь, правда, нет ещё полного *отождествления* отношения и дроби. Дробь мыслится как форма числа, в которой указывается действие, но не выполняется; в отношении же оно уже является *выполненным*; так, $^8/_2$ — дробь (указывается что 8 следует разделить на 2), отношением же является результат деления, т. е. 4. Действительно, Серре говорит: отношением одной величины к другой, с ней однородной, называется число, выражающее меру первой величины, когда второе принято за единицу (т. е. измерение предполагается уже совершённым). Такое же определение и у Бореля[43]).

Существуют и в настоящее время такие учебники арифметики, которые не решаются сделать не только последний, но и предпоследний шаг, какой делают Серре и Борель на пути к отождествлению отношения и дроби.

Некоторые за отношение большего к меньшему считают число, показывающее, *во сколько раз* первое больше второго; при этом «во сколько раз» понимается шире, чем обычно, — как число, которое является результатом деления. Но это выставляется уже не как определение, а как положение, которое следует доказать или разъяснить.

У Ньютона[44]) число мыслится как отношение, но то, что всякое отношение является числом, или даже то, что оно характеризуется числом, — это у него определённо не выражено.

Во «Всеобщей арифметике»[44]) он пишет следующее: «Под числом мы понимаем не столько множество единиц, сколько отвлечённое отношение какой-нибудь величины к другой величине того же рода, принятой нами за единицу. Число бывает трёх видов: целое, дробное и глухое (surdus) *). Целое число есть то, что измеряется единицей; дробное — кратной долей единицы; глухое число несоизмеримо с единицей».

«Умножение в собственном смысле слова есть действие, производимое над целыми числами, с помощью которого находят новую величину, во столько раз большую множимого, во сколько множитель больше единицы. Но за отсутствием более подходящего

---

[41]) Лакруа (Lacroix), Основания арифметики, СПБ, 1826.

[42]) Серре (Serret), Курс арифметики, Москва, 1881.

[43]) Борель (Borel), Арифметика, Москва, 1924.

[44]) См. примеч. 24.

*) Под этим Ньютон понимает иррациональное число. (*Прим. ред.*)

слова умножением называют также действие над дробными или иррациональными числами, с помощью которого ищут новую величину, находящуюся со множимым в том же отношении (каково бы оно ни было), какое множитель имеет к единице».

В том же смысле высказывается Ньютон, говоря и о делении[45]).

11. Чётно-чётные и чётно-нечётные числа. Числа принадлежат к классу *чётных* или к классу *нечётных*; один класс исключает другой.

Чётные же, в свою очередь, принадлежат к классам чётно-чётных (A') и чётно-нечётных (A''), причём A' и A'' уже не исключают друг друга, т. е. существуют числа A', принадлежащие A'', и обратно.

Число 12 — чётно-чётное, так как 12 по разделении на 2 (чётное число) даёт 6 (тоже чётное), но оно вместе с тем и чётно-нечётное, так как по разделении на чётное число 4 даёт нечётное 3.

Таким образом, чётные числа можно разделить на три класса A, B, C, уже друг друга исключающие:

1) только чётно-чётные,
2) только чётно-нечётные,
3) чётно-чётные и вместе с тем чётно-нечётные.

Некоторые комментаторы приходили к заключению, что в определениях 9 и 10 произошёл пропуск слова «только». Но предложения 32, 33, 34 книги IX ясно показывают, что эти классы чисел понимаются Евклидом именно в разъяснённом смысле.

Между нечётными числами находятся числа простые, делящиеся только на себя и на единицу, и числа составные, которые согласно предложениям 28, 29 книги IX, делятся на нечётное и в частном дают тоже нечётное и таким образом, согласно определению Евклида, являются всегда *нечётно-нечётными*.

Отсюда видно, что определение нечётно-нечётного является преждевременным. Оно должно явиться лишь тогда, когда будет оправдано с помощью 28-го и 29-го предложений IX книги, что произведение чётного на нечётное даёт чётное число, а произведение нечётного на нечётное даёт нечётное.

Пейрар[46]), основываясь на одном из манускриптов, вводит ещё числа нечётно-чётные, которые не встречаются у старых комментаторов и которые сводятся к чётно-нечётным.

12. Определение умножения. Евклид сводит понятие умножения к сложению (опять мысля отрезки, отвечающие целым числам).

Умножить N на 5, значит образовать число, полученное прибавлением к N четыре раза по N. При таком определении множитель и множимое имеют различные значения.

---

[45]) Там же (см. примеч. 24).

[46]) Peyrard, Les éléments de Géometrie d'Euclide traduits litteralement avec des notes. Paris, 1804.

При *слиянии V и VII книг* это определение должно было эволюционировать в другое. Умножение стало определяться не *сложением*, а *пропорцией*:

$$a:1=x:b,$$

т. е. произведение стало определяться как то, что содержит b столько раз, сколько в a единиц. Под такое определение одинаково подходило и умножение в смысле образования прямоугольника между a и b (ему отвечал термин ducere XVII века) и умножение в смысле VII книги (термин multiplicare).

После определения Евклида Клавий[47]) приводит и определение с помощью пропорции. Вместе с тем он даёт и определение *деления*. Деление — это нахождение числа, которое к единице имеет то же отношение, что делимое к делителю. Соответственно этому он изменяет определение *квадрата* и *куба*.

То, что Евклид доказывает, у Борелли[48]) является уже определением. Квадратное число — это число, между которым и единицей существует одно среднее пропорциональное, т. е. которое определяется пропорцией:

$$x:a=a:1.$$

Куб определяется пропорцией:

$$x:a=a^2:1.$$

Другие определяют куб пропорцией:

$$x:a^2=a^2:a=a:1,$$

предполагающей две средних пропорциональных между a^3 и единицей.

13. Плоскостные и телесные величины. Евклид мыслит числа всегда в связи с геометрическими образами. С множителем и множимым у него связан образ отрезка, с произведением $a \cdot b$ — образ отрезка, который получается откладыванием a столько раз, сколько единиц в b. Все доказательства Евклид ведёт не для абстрактных чисел, как позже Никомах, а для отрезков.

Термины «плоскостное» и «телесное» число являются, вероятно, пережитком более раннего периода математической мысли, когда число и геометрический образ были ещё теснее связаны, когда произведение числа a предметов на абстрактное число b мыслилось как расположение этих предметов в b рядах по a предметов в каждом, с заполнением площади прямоугольника. То же следует сказать и о произведении трёх чисел, являющемся, согласно евклидовской терминологии, телесным числом.

---

[47]) Clavius, Opera math., Moguntiae, 1612. Euclidis Elementa, стр. 306.

[48]) Borelli, Euclides restitutus, Pisa, 1658.

Когда Евклид оперирует произведением в смысле II книги, т. е. прямоугольником $a \cdot b$ между a и b, то a и ab оказываются величинами различных родов: a — длина отрезка, а ab — площадь. Кроме этих двух родов существует ещё третий: abc — объём. При этом три рода величин — линейные, плоскостные и телесные — нельзя было пополнить новыми, так как произведения $abcd$ и $abcde$ не имели бы никакого геометрического смысла. Поэтому Евклид, понимая квадрат и куб в смысле II книги, не мог оперировать в V книге непрерывными пропорциями вида $1:a = a:a^2 = a^2:a^3 = a^3:a^4$, так как a^4 геометрического смысла не имело.

Евклидовские плоскостные и телесные числа возрождаются в буквенной алгебре Виэты[49]).

Чтобы понять роль плоскостных и телесных чисел в буквенной алгебре, разберем, что означают буквы a, b, c, x в уравнении

$$ax^2 + bx = c.$$

Для нас a, b — известные числа, а x — число неизвестное. Но если мы возвратимся к XVII и даже к XVIII веку, то попадём в другое положение.

Алгебраическая величина была только родом, обнимающим два вида непрерывных величин, каковыми являются *геометрические* величины (длины, поверхности и объёмы), и *дискретные*, т. е. числа, причем понятие числа не шло дальше рациональной области. Произведение ab понималось или как результат умножения чисел a на b, или как результат умножения отрезков a на b; в последнем случае это — площадь прямоугольника, построенного на a и b (по Евклиду — «между a и b»). Над этими понятиями стоит объемлющее их понятие умножения, понимаемое как получение величины, которая к умножаемой имеет то же отношение, какое множитель к единице.

Виэта рассматривает величины различных порядков: линейные, плоские — planum, телесные — solidum.

Эти виды величин пополняются новыми высших порядков: planum-planum и solidum-planum.

Поскольку дело идет о геометрических величинах, этого рода величины являются чем-то вроде мнимых, над которыми производят операции, как над $\sqrt{-1}$, пока алгебра не приходит к декартовской интерпретации характеристик отрезками[50]); во всяком случае, это *разнородные* величины, которые нельзя ни складывать, ни вычитать. Но возможно определить для них умножение и деление, а также распространить понятие равенства отношений или пропорций не только на однородные, но и на неоднородные величины.

---

[49]) Vieta, Opera math. ed. Schooten (Lugduni Batavorum, 1646).

[50]) Д. Мордухай-Болтовской, Первые шаги буквенной алгебры. Известия СКГУ, 1928, т. III.

Можно писать пропорцию:

$$x \text{ plan} : A \text{ plan} = B \text{ sol} : 1 \text{ solid},$$

дающую определение умножения:

$$x = A \text{ plan} \times B \text{ solid}.$$

Умножение *алгебраическое* ни в коем случае не сводится к сложению. Эта мысль выявляется и в принятой Виэтой символике: $18\,Q$ — это 18 раз взятый квадрат

$$Q + Q + Q + \ldots + Q.$$

Произведение же A на B пишется так:

$$A \text{ in } B.$$

14. Виды плоскостных чисел. Никомах[51]) различает виды плоскостных тел: ἑτερομήκης — неравносторонний — $n\,(n+1)$, προμήκης — продолговатый — $n\,(n+m)$.

Он говорит, что разность между неравносторонним числом и ближайшим квадратом равна производящему этот квадрат числу:

$$n\,(n+1) - n^2 = n, \quad (n+1)^2 - n\,(n+1) = n + 1.$$

Он устанавливает предложения:

$$(n+1)^2 - n^2 = 2n + 1,$$
$$(n+1)\,(n+2) - n\,(n+1) = 2n + 2,$$

т. е. разность между двумя последовательными квадратами — нечетное число, а между двумя последовательными неравносторонними числами — чётное и т. д. Такое же исследование он ведёт и для различных видов телесных чисел.

15. Степень. Евклид не даёт определения 4-й, 5-й, 6-й степени, хотя, развивая теорию геометрической прогрессии как непрерывной пропорции, он пользуется и более высокими степенями, чем определяемые им квадрат и куб.

Греческое слово δύναμις (латинское potentia) встречается у Гиппократа Хиосского (2 пол. V в. до н. э.) для обозначения второй степени.

Диофант пользуется 4-й, 5-й, 6-й степенями. Он называет 5-ю степень δυναμοκυβος — «квадратокуб». Такие комбинированные термины употребляются в ранней европейской символической алгебре.

16. Таблицы квадратов и кубов[52]). Таблицы квадратов и кубов можно найти в современных математических справочниках. Региомонтан (1436—1476) даёт таблицы квадратов от 1^2 до

---

[51]) Nicomachus Geras., Introductionis Arithmeticae libri II, ed. Hoche, Leipzig, 1866.

[52]) Tropfke, Gesch. der Elementar-Math., I, C, III (3. Aufl., 1930).

$1130^2 = 1\,276\,900$. В этих границах остаётся и Клавий. Гюльден уже имеет таблицы для чисел от 1 до 10 000, а Бюхнер — как для квадратов, так и для кубов — до 12 000, Лудольф — до 100 000.

Таблицу квадратов можно употреблять как таблицы умножения, если применять, как это делает Блятер в 1887 году, формулу

$$ab = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

Блятер даёт таблицу четвертей квадратов от 1 до 200 000.

17. Обозначение пропорции. Укажем различные обозначения пропорции.

Мы пишем: $7:12 = 84:144$.

Региомонтан [53]) употребляет особое обозначение для непрерывной пропорции

$$a:b = b:c.$$

Он пишет $a:b:c$.

Очень стойко держится обозначение Оутреда [54]) (1574 — 1660)

$$a \cdot b. : c \cdot d.$$

Для непрерывной пропорции принимается обозначение

$$a,\ b,\ c\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot},$$

которое сохраняется и нами для геометрической прогрессии.

Декарт принимает обозначение $a\ b\ c\ d$.

Джемс и Давид Грегори [55]) пользуются обозначением

$$a:b::c:d.$$

Это обозначение доходит даже до Лакруа.

Наконец, употребляется в XVII веке и обозначение

$$a:b \mid c:d.$$

18. Поправка Клавия к 21-му определению. Клавий [56]) прибавляет к евклидовскому определению пропорциональности: «*или ещё, когда в первом второе, а в третьем четвёртое содержится равное число раз с прибавлением одной и той же части или же частей*», так как, по определению Евклида, пропорция:

$$a:b = c:d$$

устанавливается только для $a < b$ и $c < d$, а он желает обнять определением и случай, когда $a > b$ и $c > d$.

---

[53]) Regiomontanus, Der Briefwechsel, ed. M. Curtze, Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., Bd. 12, Leipz., 1902.

[54]) W. Oughtred, Clavis mathematicae, cap. VI, London, 1631.

[55]) Tropfke, Gesch. d. Elementar-Math., Bd. III, A, 2 (3. Aufl., 1937).

[56]) Clavius, стр. 310, см. примеч. 47.

Для того чтобы обобщить определение 21-е, не пополняя его, Коммандин[57]) придаёт определению 4 более общий смысл, именно он мыслит «части» с большим числом единиц, чем в целом, т. е. мыслит 7 «частями» 5.

19. Подобные числа. Следует правильно понимать подобие плоскостных чисел. Два числа M и N будут подобными плоскостными числами, если существует хотя бы одно разложение вида

$$M = a \cdot b, \quad N = c \cdot d,$$

при котором выполняется пропорция

$$a : b = c : d;$$

тогда, на основании доказываемого в VII книге, будет и

$$a : c = b : d.$$

То же самое следует сказать и о подобных телесных числах.

Бесспорно, происхождение этого термина чисто геометрическое. С подобными плоскостными числами связываются два прямоугольника: один прямоугольник со сторонами a и b (Евклид a и b называет не сомножителями, а сторонами) и другой, ему подобный, со сторонами c и d, что предполагает пропорцию

$$a : c = b : d.$$

В случае телесных чисел мыслятся два подобных прямоугольных параллелепипеда со сторонами (a, b, c), (d, e, f), для которых

$$a : d = b : e = c : f.$$

20. Аксиоматика книги VII. Старейший европейский комментатор Евклида Кампанус[58]) старается «выловить» те аксиомы, которыми неявно пользуется Евклид в своих арифметических книгах. Он усматривает 6 таких аксиом:

1) *Часть меньше целого.* Это 8-я аксиома I книги, но отнесённая к числам.

2) *Одинаковые кратные равных чисел равны, и обратно.* Если $a = b$, то $ma = mb$; если $ma = mb$, то $a = b$.

3) *Единица — часть числа, которая берёт себе имя от количества единиц, из которых образуется число,* т. е. 1 — это третья часть трёх, пятая часть пяти и т. д.

4) *Часть тем меньше, чем больше число, от которого она получает название.*

---

[57]) Commandinus, Euclidis Elementorum libri XV. Pesaro, 1572.

[58]) Campanus (Zambertus), Euclidis Megar. Elem. Geom. Parisiis, 1516.

Если понимать евклидову часть как дробь, то символически эта аксиома выражается так:

$$\text{если } m > n, \text{ то } \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.$$

5) *Если одно число делит другое, то оно делит и всякое его кратное.*

Если $a = kb$, то $pa = qb$.

6) *Если одно число делит два других, то оно делит и их произведение и их разность.*

Если $a = mc$ и $b = nc$, то $ab = pc$ и $a - b = qc\,(a > b)$.

Эти аксиомы пополняются ещё постулатами, из которых первые три сводятся к утверждению безграничности ряда натуральных чисел, а четвёртый гласит, что число нельзя уменьшать безгранично, что в каждой совокупности чисел существует наименьшее. Последний принцип используется при доказательстве 2-го предложения VII книги. Сам Кампануc пользуется им, устанавливая несоизмеримость отрезков в золотом сечении (примечание Кампануса к предложению 16 книги IX).

Эта система в значительной мере пополняется Клавием[59]). Первая аксиома Кампануса относится к I книге и расчленяется на две: 1-ю и 2-ю. Третья и четвёртая аксиомы — новые; они подчёркивают однозначность определённой евклидовой части или частей и символически (хотя и неточно) выражаются так:

3. Если $a = b$, то $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$; если $\frac{1}{n}a = \frac{1}{n}b$, то $a = b$.

4. Если $a = b$, то $\frac{m}{n}a = \frac{m}{n}b$; если $\frac{m}{n}a, = \frac{m}{n}b$, то $a = b$.

3-я аксиома Кампануса выражается несколько иначе:

5. *Единица измеряет всякое число числом единиц, которые в нём заключаются, т. е. измеряет число им самим.* Символически это правильней выразить так:

$$a = 1 \cdot a.$$

6. *Всякое число измеряет себя единицей,* т. е. символически,

$$a = a \cdot 1.$$

7. *Если число, умножая число, производит что-нибудь, то множитель измеряет произведение множимым, а множимое — множителем.*

Это можно выразить, хотя и не вполне точно, так:

$$ab : a = b, \quad ab : b = a.$$

---

[59]) См. примеч. 47.

8. *Если число измеряет другое число, то то, по которому оно измеряет (результат измерения), будет измерять это другое тем же числом единиц, которое будет в измеряющем (первом числе), т. е. самим измеряющим числом.*

Если $a:c=b$, то $a\cdot b=c$.

9. *Если на измеряющее число умножить то, по которому оно измеряет (результат измерения), то получится то, которое измеряется,*

$$(a:b)\times b=a.$$

10. *Число, измеряющее два числа, измеряет и их произведение.*

Если $b=ma$, $c=na$, то $bc=pa$.

14. *Число, измеряющее какое-либо число, измеряет и всякое другое, которое это число измеряет.*

Если $a=bk$, то $ap=bq$.

15. *Число, измеряющее уменьшаемое и вычитаемое, измеряет и остаток.*

Если $a=cm$, $b=cn$, то $a-b=c(m-n)$.

К этим аксиомам Клавий прибавляет ещё постулаты.

Требуется, чтобы: 1) от всякого числа можно было взять кратное; 2) для каждого числа можно было найти большее; 3) всякое число можно было разделить на части.

Аксиоматическая система Кардана[60]) очень сильно отклоняется от этой системы.

Вне сомнения, что и понимание постулатов у Кардана совсем не евклидовское: это — истины, которые следует принять, но которые менее очевидны и более сложны, чем аксиомы.

21. Алгорифм Евклида[61]). В настоящее время алгорифм Евклида, служащий для нахождения общего наибольшего делителя чисел a и b, мы представляем системой равенств:

$$\left.\begin{array}{c} a=bq+r_1, \\ b=r_1q_1+r_2, \\ r_1=r_2q_2+r_3, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ r_{n-3}=r_{n-2}q_{n-2}+r_{n-1}, \\ r_{n-2}=r_{n-1}q_{n-1}+r_n, \end{array}\right\} \qquad (1)$$

деля a на b с остатком r_1, деля b на остаток r_1 с остатком r_2, деля первый остаток r_1 на второй r_2 с остатком r_3 и т. д.

Первое предложение Евклида утверждает, что если $r_n=1$, то a и b суть числа взаимно простые.

---

[60]) Cardanus, Opera, IV, 1667. Opus novum de proportionibus, стр. 453.

[61]) Heath, стр. 297 (см. примеч. 1).

В этом убеждаемся от противного, предполагая, что a и b делятся на $d > 1$. Тогда, идя последовательно сверху вниз от одного равенства к другому, доказываем, что d делит (b, r_1), затем (r_1, r_2), (r_2, r_3), ... и, наконец, (r_{n-1}, r_n), чего быть не может, так как $r_n = 1$ не делится на d.

Второе предложение утверждает, что при $r_n = 0$ r_{n-1} оказывается общим наибольшим делителем (a, b) : $D(a, b) = r_{n-1}$.

Идя *вверх* в системе равенств (1), доказываем, что r_{n-1} — общий делитель a и b. Что r_{n-1} — наибольший общий делитель, следует из того, что, идя *вниз*, обнаруживаем, что в противном случае $d = D(a, b) > r_{n-1}$ делит r_{n-1}.

Следует сделать одну поправку: Евклид не делит a на b, но вычитает b последовательно несколько раз из a, пока не получает остаток $r_1 < b$, таким же образом из b вычитает несколько раз r_1, пока не получает $r_2 < r_1$, и т. д. Это вызывается тем, что как число, так и всякая операция над числом у него мыслится в *геометрических образах*.

Бертран[62]) в своей Теоретической арифметике решает вопрос о высшей границе для числа операций в алгорифме Евклида. Он доказывает, что

1. *Каждый из остатков, получаемых при нахождении общего наибольшего делителя, меньше половины предшествующего.*

2. *Предел числа деления, который нужно выполнить для нахождения общего наибольшего делителя двух данных чисел, A и B, равен удвоенному числу, выражающему место первого из членов ряда*

$$2,\ 4,\ 8,\ 16, \ldots,$$

образованного степенями 2, превышающими меньшее из данных чисел.

22. Непрерывная дробь[63]). Система равенств (1) может быть переписана в виде

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r_1}{b},$$

$$\frac{b}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1},$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}}.$$

---

[62]) Бертран (Bertrand), Курс теоретической арифметики, СПБ, 1885.

[63]) Färber C., Arithmetik Leipz., 1911 (есть русск. пер.), гл. V.

что даёт:

$$\frac{a}{b}=q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\cdots+\cfrac{1}{q_{n-1}+\cfrac{r_n}{r_{n-1}}}}}.$$

В том случае, если $r_n=0$, получаем конечную непрерывную дробь. Таким образом, алгорифм Евклида даёт разложение рациональной дроби $\frac{a}{b}$ в конечную, иначе говоря, обрывающуюся непрерывную дробь. Но непрерывная дробь нами употребляется больше для *иррациональных* чисел, а именно, для получения различной степени приближённых значений, которые определяются подходящими дробями уже *бесконечной* непрерывной дроби

$$q=\frac{1}{q_1}+\frac{1}{q_2}+\frac{1}{q_3}+\ldots$$

$$q\cdot q+\frac{1}{q_1}-\frac{qq_1+1}{q_1},$$

$$q+\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2}}=q+\frac{q_2}{q_1q_2+1}-\frac{q(q_1q_2+1)+q_2}{q_1q_2+1},\ldots$$

В этом смысле непрерывная дробь впервые применяется Бомбелли[64]. Он представляет $\sqrt{13}$ в форме непрерывной дроби. Дальнейшее развитие непрерывных дробей находим у Катальди[65].

Следует ещё упомянуть о Даниле Швенгере с его Практической Геометрией, в которой подходящая дробь является, как приближённое значение рациональной дроби с очень большим числителем и знаменателем, а также Брункере и Гюйгенсе.

Полную теорию непрерывных дробей впервые находим во «Введении в анализ» Эйлера[66].

Свойство, побудившее Швентера и Гюйгенса оперировать непрерывными дробями, состоит в том, что если данную рациональную дробь с большими числителем и знаменателем разложить в непрерывную дробь, то каждая подходящая дробь наилучшим образом приближает эту дробь в том смысле, что не существует

---

[64]) Bombelli R., L'Algebra, Bologna, 1572.

[65]) Cataldi, Trattato del modo brevissimo di trovar i radici quadrati dei numeri, 1613.

[66]) См. примеч. 34.

другой дроби, которая подходила бы ближе к данной, и члены которой были бы меньше.

Укажем, как Гюйгенс был приведён к использованию этого свойства. Он хотел построить планетарий, приводимый в движение при помощи зубчатых колёс. Число зубцов различных колёс должно было отвечать временам обращения планет, а отношения этих времён выражались большими числами. Изготовление колёс с миллионами равных зубцов оказывалось практически неосуществимым, поэтому Гюйгенс был вынужден искать приближённое значение отношений в виде отношений с меньшими членами.

23. Пифагорейская теория пропорций. Понятие о части или «частях» представляет зародыш, из которого в дальнейшем разовьётся характерная для греческой математики теория отношений и пропорций. Всякое меньшее число по отношению к большему является или частью или «частями», причём в высшей степени вероятно, что под «частями» подразумевались не только равные, но и неравные части, как у египтян, где части соответствует аликвотная дробь. Таким образом, вполне возможно, что первоначально употреблялись выражения типа «5 есть $\frac{1}{2}\frac{1}{3}$ от 6» в смысле «5 есть $\frac{5}{6}$ от 6». Следы подобной записи дробей встречаются и на греческой почве; во всяком случае, наше понятие числителя дроби выработалось уже в греческой математике, но основой для него послужили египетские аликвотные дроби с числителем, равным единице. Следы этого сохранились и в терминологии Евклида, где в определении 3 часть понимается как аликвотная дробь, и в том обстоятельстве, что теоремы 5—10 распадаются на два параллельных отдела: одно и то же положение доказывается сначала для «части», а потом для «частей». Вот наличие этой связи с египетской математикой делает очень вероятным предположение, что первичный материал V, VII, VIII и IX книг был заложен ещё в пифагорейской школе, но, конечно, приводимые Евклидом доказательства представляют уже позднейшую форму изложения. Так, нетрудно видеть, что, хотя евклидово доказательство опирается на понятие первых чисел и алгорифм отыскания наибольшей общей меры двух чисел, оба эти понятия легко могут быть исключены из общего хода рассуждений: действительно, уже употребляющегося в первой части доказательства разложения меньшего числа BC на единицы вполне достаточно для доказательства того, что BC является «частями» большего числа A.

Представляющие вполне законченное целое теоремы 5—10 интересны в том отношении, что они позволяют составить представление о первоначальном методе доказательства этих теорем. Если выразить их в современной форме, то шесть евклидовских предложений будут равносильны трём следующим:

I. «Если $a = kb$ и $c = kd$, то $a + c = k(b + d)$» (предложения 5 и 6).

II. «Если $a = kb$ и $c = kd$, то $a + c = k(b + d)$» (предложения 7 и 8).

III. Если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (предложения 9 и 10).

Что может объединить два первых предложения с третьим, как будто совершенно от них отличным? Можно показать, что все эти три предложения могут быть доказаны *на одном и том же чертеже* (черт. 1).

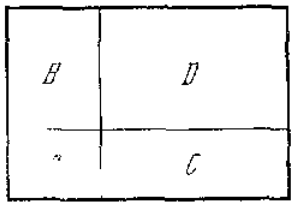
Действительно, из рассмотрения этого чертежа мы можем выписать ряд очевидных соотношений:

$$\frac{A}{A+B} = \frac{C}{C+D} = \frac{A+C}{A+C+B+D},$$

что доказывает положение I;

$$\frac{A}{A+B} = \frac{A+C}{A+C+B+D} = \frac{C}{C+D},$$

что доказывает положение II, и, наконец,



Черт. 1.

$$\frac{A}{A+B} = \frac{A+C}{A+C+B+D},$$

$$\frac{A}{A+C} = \frac{A+B}{A+B+C+D},$$

что доказывает последнее положение III.

Весьма вероятно, что именно так и доказывались первоначально эти теоремы. Евклидовское доказательство этих теорем, если выразить его в современной форме, сводится к таким рассуждениям:

Предложение 5. Дано

$$A = \frac{1}{k} \cdot BC, \quad D = \frac{1}{k} \cdot EI.$$

Доказать, что

$$A + D = \frac{1}{k}(BC + EI).$$

Имеем:

$$BC = kA = \overbrace{A + A + \ldots + A}^{k \text{ раз}}$$
$$EI = kD = D + D + \ldots + D$$

$$BC + EI = \underbrace{(A+D) + (A+D) + \ldots + (A+D)}_{k \text{ раз}} = \boldsymbol{k(A+D)}$$

$$A + D = \frac{1}{k}(BC + EI).$$

Предложение 6. Дано: $AB = \frac{m}{n} \cdot C$, $DE = \frac{m}{n} \cdot I$.
Доказать, что

$$AB + DE = \frac{m}{n}(C + I).$$

Обозначим n-ю часть C через u и n-ю часть I через v, тогда

$$C = u + u + \ldots + u \text{ (}n\text{ раз)}, \quad I = v + v + \ldots + v \text{ (}n\text{ раз)},$$
$$AB = u + u + \ldots + u \text{ (}m\text{ раз)}, \quad DE = v + v + \ldots + v \text{ (}m\text{ раз)}.$$

Но

$$AH = u = \frac{1}{n} C, \quad DG = v = \frac{1}{n} I,$$

и по предложению 5:

$$u + v = \frac{1}{n}(C + I),$$

$$m(u + v) = \frac{m}{n}(C + I),$$

$$AB + DE = \frac{m}{n}(C + I).$$

Предложение 7. Дано:

$$AB = \frac{1}{k} \cdot CD, \quad AE = \frac{1}{k} \cdot CI.$$

Доказать, что

$$AB - AE = \frac{1}{k}(CD - CI).$$

Положим

$$CH = k(AB - AE) = k \cdot EB;$$

тогда

$$EB = \frac{1}{k} \cdot CH,$$

и, значит (предложение 5):

$$AE + EB = \frac{1}{k} \cdot (CI + CH),$$

$$AB = \frac{1}{k} \cdot HI.$$

Но $AB = \frac{1}{k} \cdot CD$, значит, $CD = HI$.

Далее, $CD - CI = HI - CI$, т. е. $HC = ID$. Но

$$AE = \frac{1}{k} \cdot CI \text{ и } EB = \frac{1}{k} \cdot CH = \frac{1}{k} \cdot ID,$$

значит,

$$EB = AB - AE = \frac{1}{k} \cdot ID = \frac{1}{k} \cdot (CD - CI).$$

Предложение 8. Дано: $AB = \frac{m}{n} \cdot CD$, $AE = \frac{m}{n} \cdot CI$; доказать, что

$$AB - AE = \frac{m}{n} \cdot (CD - CI).$$

Положим $HG = AB$; тогда $HG = \frac{m}{n} CD$. Если $\frac{1}{n} \cdot CD = u = HK$ и $\frac{1}{n} \cdot CI = v = AL$, то

$$HG = u + u + \ldots + u \quad (m \text{ раз}) \ (= 2HK),$$
$$AE = v + v + \ldots + v \quad (m \text{ раз}) \ (= 2AL).$$

Так как $CD > CI$, то $u > v$. На отрезке HG полагаем $HM = v$. Из равенств

$$u = HK = \frac{1}{n} \cdot CD, \quad v = HM = \frac{1}{n} \cdot CI$$

получаем (предложение 7):

$$HK - HM = \frac{1}{n} \cdot (CD - CI),$$

$$MK = \frac{1}{n} \cdot DI.$$

Пусть $v = AL$. Имеем (у Евклида $m = 2$):

$$KG = HG - HK = \frac{m}{n} \cdot CD - \frac{1}{n} \cdot CD = \frac{m-1}{n} \cdot CD = (m-1)\,u;$$

$$EL = AE - AL = \frac{m}{n} \cdot CI - \frac{1}{n} \cdot CI = \frac{m-1}{n} \cdot CI = (m-1) \cdot v.$$

Положим

$$KN = EL = \frac{m-1}{n} \cdot CI = (m-1)\,u.$$

По предложению 7,

$$KG - KN = NG = (m-1)\left(\frac{CD}{n} - \frac{CI}{n}\right) = (m-1) \cdot \left(\frac{ID}{n}\right).$$

Но $MK=\frac{ID}{n}$; значит,

$$MK+NG=\frac{ID}{n}+(m-1)\cdot\frac{ID}{n}=\frac{m}{n}\cdot ID.$$

Теперь

$$MK=HK-HM=u-v,$$
$$NG=KG-KN=(m-1)(u-v),$$
$$MK+NG=m(u-v)=mu-mv=HG-AE=AB-AE=EB,$$

значит,

$$AB-AE=\frac{m}{n}ID=\frac{m}{n}\cdot(CD-CI).$$

Предложение 9. Дано: $A=\frac{1}{k}\cdot BC$, $D=\frac{1}{k}\cdot EI$; доказать, что, если $A=qD$, то и $BC=q\cdot EI$.

Имеем:

$$BC=A+A+\ldots+A \qquad (k \text{ раз});$$
$$EI=D+D+\ldots+D \qquad (k \text{ раз}).$$

Если положим

$$BH=A, \qquad HC=(k-1)A,$$
$$EG=D, \qquad GI=(k-1)D.$$

(у Евклида $k=2$), то

$$BH=q\cdot EG, \qquad HC=q(k-1)D=q\cdot GI.$$

Но, по предложениям 5 и 6,

$$BH+HC=q(EG+GI).$$

и, значит,

$$BC=q\cdot EI.$$

Предложение 10. Дано $AB=\frac{m}{n}\cdot C$, $DE=\frac{m}{n}\cdot I$, доказать, что если $AB=q\cdot DE$, то и $C=q\cdot I$.

Положим $\frac{C}{n}=u$, $\frac{I}{n}=v$. Имеем:

$$AB=u+u+\ldots+u \qquad (m \text{ раз})(=2AH),$$
$$DE=v+v+\ldots+v \qquad (m \text{ раз})(=2DG).$$

Если положим:

$$AH=u=\frac{C}{n},\ DG=v=\frac{I}{n},$$

$$HB=(m-1)u=(m-1)\cdot\frac{C}{n},$$

$$GE=(m-1)v=(m-1)\frac{I}{n},$$

то и «перестановкой», на основании предложения 9, получаем:

$$AH = q \cdot DG, \quad C = q \cdot I.$$

Далее, поскольку

$$HB = (m-1) \cdot AH, \quad GE = (m-1) \cdot DG,$$

то

$$HB = (m-1) q \cdot DG = q \cdot GE.$$

Таким образом:

$$HB = q \cdot GE, \quad C = q \cdot I.$$

Складывая выражения для AH и HB, получим:

$$AH + HB = q(DG + GE)$$

или

$$AB = q \cdot DE,$$

что вместе с равенством $C = q \cdot I$ и доказывает искомое.

Интересно отметить, что при доказательстве предложений 5—8, а также 1—3 и в дальнейшем 28 и 35 Евклид пользуется в невысказанной форме постулатом, что число, измеряющее сумму и одно слагаемое, будет измерять и другое.

Следующие четыре предложения (11—14) касаются тоже свойств пропорций, но между ними и только что разобранными шестью (5—10) лежит целая пропасть; если до сих пор Евклид пользовался только определениями 3 и 4, и термина «пропорция» не употреблял, то теперь определение 21, выражающее пропорциональность, получает уже полные права гражданства: мы имеем дело с более поздней фазой развития теории пропорций.

Теорема 11 в известной степени повторяет предложения 7 и 8:

«Если как целое к целому, так и отнятое к отнятому, то и остаток к остатку будет как целое к целому».

Дано:

$$\frac{AB}{CD} \quad \frac{AE}{CI}.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{EB}{ID} \quad \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CI} = \frac{AB}{CD}.$$

Поскольку, согласно определению 21, равенство отношений приводится к тождественности части или «части» предыдущего к последующему, теорема доказывается применением предложений 7 и 8.

Теорема 12, выражающаяся формулой:

$$\text{«Если } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \text{ то } \frac{A}{B} = \frac{A+C}{B+D}\text{»},$$

точно так же, путём применения определения 21, сводится к предложениям 5 и 6.

Аналогично, *теорема 13*, выражающаяся формулой.

$$\text{«Если } \frac{A}{B} = \frac{C}{D}, \quad \text{то} \quad \frac{A}{C} = \frac{B}{D}\text{»},$$

с применением определения 21 выводится из предложения 10.

Новый материал представляет лишь *предложение 14*, соответствующее преобразованию «по равенству» (*ex aequo*)

$$\text{«Если } \frac{A}{B} = \frac{D}{E} \text{ и } \frac{B}{C} = \frac{E}{I}, \text{ то и } \frac{A}{C} = \frac{D}{I}\text{».}$$

Теорема легко доказывается при помощи предложения 13.

$$\text{Если } \frac{A}{B} = \frac{D}{E}, \text{ то } \frac{A}{D} = \frac{B}{E}; \text{ если } \frac{B}{C} = \frac{E}{I}, \text{ то } \frac{B}{E} = \frac{C}{I}.$$

$$\text{Но тогда } \frac{A}{D} = \frac{C}{I}, \text{ откуда } \frac{A}{C} = \frac{D}{I} \text{ (}И\ B\text{) *).}$$

24. Смешение пятой книги с седьмой. С развитием понятия числа происходит смешение пятой книги с седьмой Теоремы VII книги начинают считаться лишними, так как то, что доказано для *величины*, относится и к *числу*

Первая идея о смешении V и VII книг является только в XVI веке Но она идёт скорее от VII книги к V, чем от V к VII Уже Мавролик, говорит Борелли[67]) в XVII веке, — отмечает, что те операции, которые производятся над числами, прилагаются и ко всем величинам одного рода, безразлично соизмеримым или несоизмеримым. Такое утверждение было бы вполне обоснованным, если бы каждая величина определялась числом, но этого, конечно, нет не только у Мавролика, но даже и у Борелли.

Мавролику[68]) можно приписать только то, что он заметил истинность теорем VII книги не только для отрезков, которыми Евклид представляет целые числа, но и для других геометрических интерпретаций целых чисел (например, площадей, которые выдвигает в своих чертежах к арифметическим книгам Борелли). Вместе с тем им было отмечено, что, подводя евклидовы отрезки, как выражаемые, так и не выражаемые целыми числами, под общее понятие величины можно провести доказательство и в *общем случае*.

Мавролик высказывает такое положение: «то, что доказывается об отношениях, пропорции, симметрии и подобии чисел, линий, тел, — всё это можно заключить *и о каких угодно величинах*».

---

*) Комментарии, подписанные инициалами *И. В.*, принадлежат И. Н. Веселовскому. (*Прим. ред.*)

[67]) См. примечание 48.

[68]) См. примечание 31.

В том случае, когда величины выражаются числами, действия над этими величинами можно привести к действиям над означающими их числами.

Большую роль в истории арифметизации геометрии сыграл Арно. У него V книга сливается совершенно с VII. Всё переводится им на *числа*, хотя, как мы уже говорили в комментариях к V книге, его числа ещё не являются в явной форме: можно сказать, что он оперирует ещё не с числами, а с отношениями, как с числами, причём все операции с отношениями соизмеримых величин переносятся на несоизмеримые.

Но следует отметить, что вначале математическая мысль приходит к *арифметизации* геометрии, только сойдя с пути строгого логического обоснования своих положений. Она приносит в жертву новым плодотворным идеям античную красоту строго-логических евклидовых выводов.

Интересно отметить определение отношения у Арно. Это — «манера» (*maniere*), по которой одна величина заключается в другой. При этом следует различать случай *соизмеримости*, когда существует величина, целое число раз заключающаяся в каждой из рассматриваемых величин, и *несоизмеримости*, когда такой величины нет. Но в рассуждениях Арно фигурирует *не отсутствие* такой величины, но содержание *актуально-бесконечное* число раз. Только распространяя вывод на случай бесконечного числа частей, можно перенести на несоизмеримые величины рассуждения Арно, которые все ведутся для *конечного* числа, т. е. для случая соизмеримости.

Аксиоматическая система Арно стягивается до аксиом, выражаемых символически так:

1) $ma : a = mb : b$,
2) $ma : mb = a : b$,
3) $ma : na = mb : nb$,
4) $ma + mb = na : nb$,
5) $mb + nb = (m + n)\, b$.

Мы видим здесь обычный приём упрощения *обращением теорем в аксиомы*.

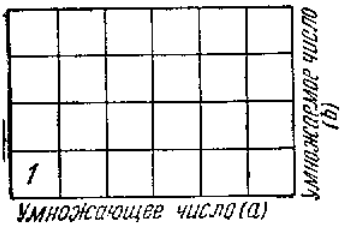
Следует отметить, что Клавий в примечаниях к большинству предложений VII книги прибавляет, что предложение верно и *для дробных чисел*. Таким образом, у него в отношениях V книги (непрерывных величин) и VII книги (*целых* чисел) ещё подразумеваются отношения рациональных чисел.

Он мыслит дробями, мимо которых проходит Евклид. Его дробь $\frac{3}{7}$ выражается целым числом, *если единицу уменьшить в семь раз*. Две дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{2}{5}$ представляются соизмеримыми отрезками, причём отрезок, равный $\frac{1}{35}$, принимается за единицу, и в одном из первых двух заключается 15, в другом 14 раз,

Конечно, Клавию нет необходимости ещё раз пересказывать доказательство предложения для дробных чисел.

25. Теорема о произведении средних и крайних. Предложения 15—19 образуют замкнутую группу, в основе которой лежит определение умножения (определение 16).

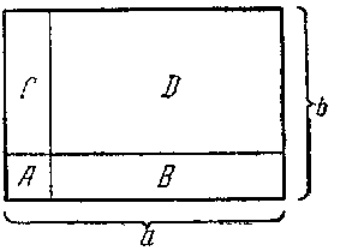
«Число *умножает число* говорится, когда сколько в нём единиц, столько раз составляется умножаемое и что-то возникает». Уже самая форма определения говорит, что произведение одного числа на другое мыслилось в виде прямоугольной таблицы (черт. 2); интересно, что определение не подразумевает, что в результате умножения получится *число*: оно просто говорит γένηταί τις — «что-то возникает», хотя трудно думать, чтобы у Евклида или его предшественников было в этом какое-нибудь сомнение.



Черт. 2.

На основании определения произведения, при помощи таблицы легко доказывается *предложение 15*, которое мы записали бы в форме пропорции:

$$\text{Если } \frac{1}{a}=\frac{b}{ab}, \text{ то } \frac{1}{b}=\frac{a}{ab}\text{».}$$



Черт. 3.

Геометрическое доказательство легко получается из рассмотрения черт. 3, если написать пропорцию:

$$\frac{A}{A+B}=\frac{A+C}{A+B+C+D}.$$

Хотя это предложение может быть легко получено из предложения 13 («перестановка средних»), Евклид так его не получает — доказательство, что предложение 15 является более древним, чем предложение 13. Евклидово доказательство сводится к следующему:

Дано $\frac{BC}{A}=\frac{EI}{D}$, где A единица; доказать, что

$$\frac{D}{A}=\frac{EI}{BC}.$$

Имеем

$$BC=A+A+\ldots+A \quad (a \text{ раз}),$$
$$EI=D+D+\ldots+D \quad (a \text{ раз}),$$
$$\frac{A}{D}=\frac{A}{D}=\ldots=\frac{A}{D}.$$

По предложению 12:

$$\frac{A}{D}=\frac{aA}{aD}=\frac{BC}{EI}.$$

Перевернув пропорцию, получаем искомое:

$$\frac{D}{A}=\frac{EI}{BC}.$$

Предложение 16, выражающее коммутативный закон умножения, в геометрической форме представления является очевидным. Доказательство Евклида сводится к следующему:

Дано $A\cdot B=C$, $B\cdot A=D$; доказать, что $C=D$. Имеем:

$$C=A\cdot B=B+B+\ldots+B \qquad (A \text{ раз}),$$
$$A=1+1+\ldots+1 \qquad (A \text{ раз}).$$

На основании предложения 15

$$\frac{B}{1}=\frac{C}{A}.$$

Точно так же:

$$D=B\cdot A=A+A+\ldots+A \qquad (B \text{ раз}),$$
$$B=1+1+\ldots+1 \qquad (B \text{ раз}).$$

На основании определения 16

$$\frac{D}{A}=\frac{B}{1}.$$

Сравнивая обе пропорции, получаем:

$$\frac{C}{A}=\frac{D}{A}, \text{ откуда } C=D.$$

Предложение 17 выражается так:

Дано $A\cdot B=D$, $A\cdot C=E$; доказать, что $\frac{B}{C}=\frac{D}{E}$.

Мы имеем:

$$A=1+1+\ldots+1 \qquad (A \text{ раз}),$$
$$D=A\cdot B=B+B+\ldots+B \qquad (A \text{ раз}), \quad \frac{1}{A}=\frac{B}{D};$$
$$E=A\cdot C=C+C+\ldots+C \qquad (A \text{ раз}), \quad \frac{1}{A}=\frac{C}{E}.$$

Из двух последних равенств получаем:

$$\frac{B}{D}=\frac{C}{E} \text{ и, перестановкой, } \frac{B}{C}=\frac{D}{E}.$$

Предложение 18 выражается следующим образом:

Дано $A \cdot C = D$, $B \cdot C = E$; доказать, что $\frac{A}{B} = \frac{D}{E}$. Его легко доказать, применяя коммутативный закон (предложение 16) и затем предложение 17.

Оба последних предложения служат подготовкой к *предложению 19*, которое состоит в следующем:

«Если $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$, то $A \cdot D = B \cdot C$ и, обратно, если $A \cdot D = B \cdot C$, то $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.»

Прямое предложение доказывается так: имеем $A \cdot D = E$, $B \cdot C = I$; полагаем: $A \cdot C = H$, $A \cdot D = E$, тогда $\frac{C}{D} = \frac{H}{E}$, $\frac{A}{B} = \frac{H}{E}$. Затем $A \cdot C = H$, $B \cdot C = I$; значит, $\frac{A}{B} = \frac{H}{I}$. Таким образом: $\frac{H}{E} = \frac{H}{I}$ и $E = 1$, т. е. $A \cdot D = B \cdot C$.

Обратная теорема доказывается так:

Из равенства $A \cdot D = B \cdot C$ или $E = I$ следует:

$$\frac{H}{E} = \frac{H}{I}, \text{ т. е. } \frac{A \cdot C}{A \cdot D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot C} \text{ или } \frac{C}{D} = \frac{A}{B}.$$

Интересно, что Евклид при доказательстве этого предложения пользуется, без специального упоминания, двумя предложениями V книги, а именно:

Предложение 7. Равные к тому же имеют то же отношение и это то же ⟨имеет то же отношение⟩ к равным.

Предложение 9. ⟨Величины⟩, имеющие к одному и тому же то же самое отношение, равны между собой, и те, к которым одно и то же имеет то же самое отношение, равны.

В стадии развития математики, соответствующей арифметическим книгам Евклида, эти положения ещё не считались нуждающимися в доказательстве (*И. В.*).

26. Коммутативное свойство умножения. Символически предложение выражается так:

$$ab = ba,$$

т. е. в произведении можно переставить множитель и множимое. Такое свойство операции над двумя объектами или взаимоотношения двух объектов называется *коммутативностью*.

Коммутативно не только умножение, но и сложение:

$$a + b = b + a.$$

Коммутативно равенство: если $a = b$, то $b = a$. Коммутативна параллельность: если $a \parallel b$, то $b \parallel a$.

Но не коммутативно отношение, выражаемое словами «больше» и «меньше»: из $a < b$ не следует $b < a$. Коммутативность умножения Евклид доказывает совершенно иначе, чем мы. Согласно определению 21

$$1:a = b:ab,$$

откуда

$$1:b = a:ab,$$

но, вместе с тем, $1:b = a:ba$,

откуда $a:ab = a:ba$,

и, наконец, $ab = ba$.

Так же доказывается этот закон в начале XVIII века Х. Вольфом.

В случае умножения, как *построения прямоугольника между* a и b, коммутативность умножения не доказывается, она представляется просто очевидной: безразлично, что принимать за высоту, что за основание, a или b.

Следует думать, что доказательство коммутативности чисел раньше Евклида приводилось к этой очевидной коммутативности представлением чисел точками в прямоугольнике с b строчками по a точек в каждой и заменой строк столбцами.

Это, носящее, конечно, *интуитивный* характер доказательство и приводится в современных учебниках теоретической арифметики. Вместо точек обычно пишут единицы (см. табл.), показывая, что результат подсчёта единиц не зависит от того, подсчитывается ли сначала число единиц в каждой строке, а затем — число строк, или же сначала число единиц в каждом столбце, а затем — число столбцов.

$$\left.\begin{array}{c} 1\ 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \\ 1\ 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ 1\ 1\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1 \end{array}\right\} b \text{ единиц}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{a \text{ единиц}}$$

Фербер [69]) не пользуется этой таблицей, а предпочитает схемы:

$$\overbrace{\overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{a \text{ слагаемых}}\ \overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{a \text{ слагаемых}}\ \overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{a \text{ слагаемых}}}^{b \text{ частных сумм}} =$$

$$\overbrace{\overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{b \text{ слагаемых}}\ \overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{b \text{ слагаемых}}\ \overbrace{(1+1+\ldots+1)}^{b \text{ слагаемых}}}^{a \text{ частных сумм}} =$$

[69]) Färber, Arithmetik, Leipzig, 1911 (есть русск. пер.).

причем замечает, дав первую схему, что так как значение суммы не зависит от порядка единиц, то можно образовывать суммы ещё таким образом: взять по единице из каждой частной суммы и сосчитать их, затем взять по второй единице из каждой частной суммы и эти единицы сложить и продолжать таким образом до тех пор, пока не будут пересчитаны все единицы. Таким образом получаем вторую схему. В этой форме доказательство сближается с тем, которое даёт Кампанус.

Дирихле[70]) в своих «Лекциях по теории чисел» доказывает *табличкой* что

$$(ca)\,b = (cb)\,a,$$

и, полагая $c = 1$, получает коммутативный закон как *частный* случай ассоциативного:

$$ab = ba.$$

Поиски чисто логического доказательства с полным изъятием интуитивного элемента повели к логизации понятия умножения.

Произведение определяется как класс вещей, образованный из классов A и B, отвечающих a и b попарным их соединением, причём подчёркивается симметричность этого определения относительно A и B (а потому a и b). Тогда при доказательстве коммутативности, которое сводится просто к непосредственному выводу из определения, мы оказываемся в совершенно том же положении, что Евклид в отношении произведения ab, понимаемого в смысле 11 книги «Начал».

В настоящее время этот *вывод нам не представляется уже сокращением аксиоматической системы арифметики*, так как предполагает другую аксиому: *принцип инвариантности* Шредера, состоящий в том, что кардинальное число не зависит от распределения объектов класса, который оно определяет.

27. Ассоциативный закон умножения. У Евклида нет ассоциативного закона умножения, выражаемого формулой

$$(ab)\,c = a\,(bc).$$

Ассоциативность — это тоже характерное свойство некоторых классов операций и взаимоотношений. Ассоциативно также сложение:

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Для интуитивного его доказательства, вполне аналогичного доказательству коммутативного свойства, пришлось бы пользоваться стереометрическим образом, распределяя точки или единицы

---

[70]) P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorles. über Zahlentheorie, 1894. П. Г. Лежен-Дирихле, Лекции по теории чисел, М. — Л., 1936.

строками, строки в слои и заполняя слоями параллелепипед. Различного рода подсчёты давали бы $(ab)\,c = (bc)\,a$, и переход к ассоциативному закону достигался бы ещё применением доказанного раньше коммутативного закона.

28. Дистрибутивный закон. В то время, как Евклид выводит дистрибутивный закон в книге II (предложение 2), в книге VII *для целых чисел* он его не выводит, хотя в тех случаях, когда им пользуется, мыслит ту же самую операцию, которой этот закон нами доказуется.

Но, если его части и частиц мыслить как дроби, то можно считать, что он в предложениях 5 и 6 книги VII дает дистрибутивный закон в случае дробного множителя или множимого:

$$(a+b)\,c = ac + bc. \qquad (1)$$

Интуитивное доказательство того же типа, что доказательства законов коммутативного и ассоциативного, можно извлечь из вывода предложения 2 книги II, заполняя прямоугольники точками или единицами.

В настоящее время различают прямой (1) и обратный дистрибутивный закон; последний выражается формулой

$$c\,(a+b) = ca + cb. \qquad (2)$$

Конечно, (2) выводится из (1) с помощью коммутативного закона [71].

В современных логически обоснованных построениях арифметики логический приоритет признаётся не за коммутативным, а за дистрибутивным законом, из которого и выводится первый. Так поступает Шредер. Таков путь и в «Арифметике» Грассмана, который, пользуясь принципом полной математической индукции, ведёт от частного случая дистрибутивного закона

$$\alpha\,(\gamma+1) = \alpha\gamma + \alpha$$

к общему, к закону ассоциативному и, наконец, к коммутативному.

29. Неравенство отношений. Клавий пополняет предложение 19 следующим, 19[a]: *«Если отношение первого ко второму больше, чем третьего к четвёртому, то произведение из первого и четвёртого больше произведения из второго и третьего. И если произведение из первого и четвёртого больше, чем произведение из второго и третьего, то отношение первого ко второму больше отношения третьего к четвёртому.*

---

[71]) Hilbert D., Grundlagen der Geometrie, 7. Aufl., Berl., 1930. Д. Гильберт, Основания геометрии, пер. И. С. Градштейна под ред. П. К. Рашевского, М. — Л., 1948.

Пусть отношение первого, A, ко второму, B, больше, чем третьего, C, к четвёртому, D. Я утверждаю, что число, производимое из A на D, больше производимого из B на C.

Полагаем, что как E к B, так и C к D (E — число целое или дробное или целое с дробью, которое найдётся на основании предложения 19 книги IX, если произведение из B и C разделить на D). Поэтому отношение A к B больше отношения E к B, а отсюда и A больше E. Поэтому произведение из A на D больше, чем из E на D. А так как произведение из E на D равно произведению из B на C, то произведение из A на D больше, чем из B на C, что и требовалось доказать.

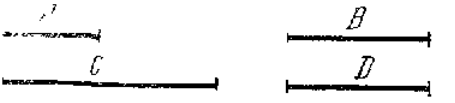
Пусть затем произведение из A на D больше, чем из B на C. Я утверждаю, что отношение первого, A, ко второму, B, больше, чем третьего, C, к четвёртому, D. В самом деле, найдём число E, которое умножая D даёт то же, что произведение из B на C (E — или целое, или дробное число, или целое с дробью). Тогда произведение из A на D будет также больше, чем из E на D, а отсюда A больше E, вследствие чего отношение A к B больше отношения E к B. Но E к B так же, как C к D. Поэтому отношение A к B больше отношения C к D, что и требовалось доказать».

Такое же положение будет, очевидно, и в том случае, если вместо «больше» возьмём «меньше».

30. Среднее геометрическое. В приложениях у Гейберга помещена следующая формулировка предложения 20, против которой возражал уже первый переводчик Евклида Кампанус и которое отличается, между прочим, и терминологией (ὑπὸ τῶν ἄκρων, ἀπὸ τοῦ μέσου).

«Если три числа пропорциональны, то ⟨произведение⟩ крайних равно ⟨квадрату⟩ на среднем. И если ⟨произведение⟩ крайних равно квадрату на среднем, то три числа пропорциональны.

Пусть будут три числа A, B, C пропорциональны: как A к B, так и B к C. Я утверждаю, что ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨квадрату⟩ на B (черт. 4).



Черт. 4.

Действительно, положим D равным B. Значит, будет, что как A к B, так и D к C. Значит, ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨произведению⟩ из B, D. ⟨Произведение⟩ же из B, D равно ⟨квадрату⟩ на B, ибо B равно D. Значит, ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨квадрату⟩ на B.

Но вот пусть ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨квадрату⟩ на B. Я утверждаю, что как A к B, так и B к C.

Действительно, поскольку ⟨произведение⟩ из A, C равно ⟨квадрату⟩ на B, ⟨квадрат⟩ же на B равен ⟨произведению⟩ B, D, то значит, будет, что как A к B, так и D к C. B же равно D. Значит, будет, что как A к B, так и B к C, что и требовалось доказать».

Это предложение, представляющее непосредственное следствие предложения 19, применялось, если верить Теону, уже Зенодором (вероятно, около начала 2-го века до н. э.).

31. Евклидова теория простых чисел. В одиннадцати предложениях (с 20-го по 30-е) излагается теория простых, или, как Евклид называет их, *первых* чисел. Формулировка первого предложения этой группы (предложения 20) — «Числа, наименьшие из имеющих то же самое отношение с ними, равное ⟨число раз⟩ измеряют имеющие то же самое отношение ⟨числа⟩, причём большее ⟨измеряет⟩ большее и меньшее меньшее» позволяет сделать очень вероятное предположение о причине возникновения теории простых чисел: *старались найти наименьшие числа, при помощи которых можно было бы представить данное отношение.* Одно и то же отношение, например, $\frac{2}{3}$, может быть представлено в виде такого ряда:

$$\frac{2}{3},\ \frac{4}{6},\ \frac{6}{9},\ \frac{8}{12},\ldots$$

Первые члены этого отношения будут взаимно простыми или «первыми» между собой, как говорит предложение 21.

Если рассматривать отдельно ряды чисел, изображающих предыдущие и последующие члены последовательных отношений — в нашем случае

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ldots$$

и

$$3,\ 6,\ 9,\ 12,\ldots$$

— то *взаимно простые* числа всегда будут занимать первое место во всех этих рядах чисел, откуда вероятно и произошло имеющееся у Евклида название простых чисел *первыми*. Для нас же, привыкших употреблять простые числа главным образом в разложении составных чисел на множители, гораздо более естественным является название *простого* числа, как элемента, из которого могут быть построены все составные числа.

Современная формулировка евклидовских доказательств этих одиннадцати предложений была бы такова:

Предложение 20. Если $\frac{A}{B}=\frac{CD}{EI}$ и CD, EI являются наименьшими из всяких A, B, то $CD=\frac{A}{m}$, $EI=\frac{B}{m}$, где m целое число.

Доказательство идёт от противного: если CD, EI не являются частью A, B, то они будут «частями». Пусть

$$CD=\frac{n}{m}\cdot A=\overbrace{\frac{A}{m}+\frac{A}{m}+\ldots+\frac{A}{m}}^{n\ \text{раз}}=CH+\ldots,$$

$$EI = \frac{n}{m} \cdot B = \overbrace{\frac{B}{m} + \frac{B}{m} + \ldots + \frac{B}{m}}^{n \text{ раз}} = EG + \ldots,$$

где CH, EG суть первые из отрезков, на которые разделяются CD, EI, равные соответственно $\frac{A}{m}$ и $\frac{B}{m}$.

По предложению 12, $\frac{CH}{EG} = \frac{CD}{EI}$, причём $CH < CD$, $EG < EI$, а это противоречит положению, что CD, EI являются *наименьшими* числами, могущими изобразить заданное отношение.

Предложение 21. Числа, первые между собой, являются наименьшими из имеющих то же отношение.

Доказательство идёт от противного: пусть A и B будут первыми между собой; если они не наименьшие, то будут два числа $C < A$, $D < B$ такие, что $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$.

Согласно предложению 20, C и D должны соответственно измерять A и B:

$$A = C + C + \ldots + C \quad (n \text{ раз}),$$
$$B = D + D + \ldots + D \quad (n \text{ раз}).$$

Пусть
$$E = 1 + 1 + \ldots + 1 \quad (n \text{ раз}).$$

Тогда
$$\frac{A}{C} = \frac{E}{1}, \quad \frac{B}{D} = \frac{E}{1},$$

$$A = C \cdot E, \quad B = D \cdot E,$$

и оба числа A и B имеют общую меру E, что противоречит предположению.

Предложение 22 (обратное). Наименьшие из имеющих то же отношение чисел будут первыми между собой.

Доказательство идёт от противного. Пусть A, B — наименьшие из чисел, имеющих то же отношение. Если они не первые между собой, то имеют общую меру C:

$$A = D \cdot C, \qquad B = E \cdot C.$$

Но, по предложению 17,

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{E}, \quad \text{где } D < A, \quad E < B,$$

а это противоречит предположению, что A и B наименьшие.

Легко доказывается от противного и *предложение 23*: число, измеряющее одно из взаимно первых чисел, будет первым с другим.

Предложение 24. Число, первое с двумя числами, будет первым и с их произведением.

Доказательство идёт от противного. Пусть A и B будут два числа, первых с C; доказать, что C будет первым с произведением $D = A \cdot B$.

Действительно, если они не первые, то имеют общую меру E:

$$C = E \cdot K, \qquad D = E \cdot I.$$

Но $D = A \cdot B$; значит, $A \cdot B = E \cdot I$, и по предложению 19,

$$\frac{E}{A} = \frac{B}{I}.$$

Так как E измеряет C, первое с A, то, по предложению 23, E будет первым с A. Тогда, по предложениям 21 и 20, числа E и A должны делить B и I:

$$B = m \cdot E, \qquad I = m \cdot A.$$

Но $C = K \cdot E$; значит, B и C имеют общую меру E, что противоречит предположению.

Предложение 25 — число, первое с каким-нибудь числом, будет первым и с его квадратом — является непосредственным следствием 24-го.

В этом предложении представляет интерес только формулировка: квадрат называется ὁ ἐκ τοῦ... γενόμενος возникающий из... (числа), в смысле произведение числа на самого себя». Это представляет более раннюю форму выражения, чем обычное у Евклида «квадрат на...» τὸ ἀπὸ τοῦ... τετράγωνον.

Предложение 26: если два числа являются первыми с каждым из двух других, то и произведения обеих пар этих чисел будут первыми между собой.

Пусть A, B первые с каждым из C, D. По предложению 24 и произведение AB будет первым с каждым из C, D, а значит, и с их произведением CD.

При помощи предложений 25 и 26 легко доказывается и *предложение 27*: если два числа являются первыми между собой, то будут первыми между собой и любые степени этих чисел.

Предложение 28 касается свойств суммы взаимно простых чисел: сумма двух взаимно простых чисел будет простой и по отношению к каждому из них; обратно, если сумма будет взаимно простой с каждым из слагаемых, то и оба эти слагаемые будут взаимно простыми.

Доказательство идёт от противного. Пусть AB, BC — два взаимно простых числа и AC — их сумма. Пусть AC не будет простым по крайней мере с одним из них, например, с AB; тогда будет существовать такое число D, что

$$AC = k \cdot D, \qquad AB = m \cdot D.$$

Но общая мера суммы и одного слагаемого будет измерять и другое слагаемое (невысказанный Евклидом в явной форме постулат); значит, и

$$BC = nD.$$

Но тогда AB и BC будут иметь общую меру D, что противоречит предположению.

Пусть теперь сумма AC и одно из слагаемых, например AB, будут взаимно простыми; требуется доказать, что AB будет простым и с другим слагаемым BC. Если AB не будет простым с BC, то будет некоторая их общая мера D:

$$AB = mD, \qquad BC = nD.$$

Но тогда D будет общей мерой и AB с суммой AC (опять невысказанный постулат), что противоречит предположению.

Клавий прибавляет следствие, что если число, составленное из двух чисел, — первое с одним из этих чисел, то оно — первое и с другим. Ибо, замечает Клавий, если AC — первое с AB, то AB и BC — взаимно первые по второй части предложения 28. Поэтому AC будет первое с BC, что и требовалось доказать.

Предложение 29 — «всякое первое число будет первым со всяким числом, не являющимся его кратным», — легко доказывается от противного.

Предложение 30 является в настоящее время основным в теории простых чисел. Оно читается так: если первое число делит произведение двух чисел, то оно обязательно разделит хоть одно из этих чисел.

Пусть произведение $A \cdot B = C$ делится на простое число D, причём A не делится на D; требуется доказать, что в таком случае B должно делиться на D.

Действительно, если C делится на D, то

$$C = E \cdot D;$$

с другой стороны,

$$C = A \cdot B.$$

Из равенства

$$A \cdot B = E \cdot D,$$

по предложению 19 следует, что

$$\frac{D}{A} = \frac{B}{E}.$$

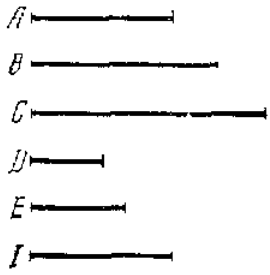
Но D и A взаимно простые; значит (по предложению 20), D должно делить B, а A — делить E. Так как D делит B, то теорема доказана. (*И. В.*)

32. Другая форма предложения 22. В приложениях к тексту Гейберга дана другая формулировка предложения 22.

«Если будут три числа и в равном с ними количестве другие, взятые попарно и в том же самом отношении, причём пропорция их будет «перемешанной», то они будут в том же самом отношении и «по равенству».

Пусть будут три числа A, B, C и в равном с ними количестве другие D, E, I, взятые попарно в том же самом отношении, и пусть пропорция их будет «перемешанной»: как A к B, так и E к I, как же B к C, так и D к E. Я утверждаю, что и «по равенству» будет — как A к C, так и D к I (черт. 5).

Действительно, поскольку как A к B, так и E к I, то значит, ⟨произведение⟩ из A, I равно ⟨произведению⟩ из B, E (предложение 19). Опять, поскольку как B к C, так и D к E, то значит, ⟨произведение⟩ из D, C равно ⟨произведению⟩ из B, E. Доказано же, что и ⟨произведение⟩ из A, I равно ⟨произведению⟩ из B, E. И, значит, ⟨произведение⟩ из A, I равно ⟨произведению⟩ из D, C. Значит, будет, что как A к C, так и D к I, что и требовалось доказать».



Черт. 5.

Это предложение, по выражению и по методу доказательства (ссылка на предложение 19), представляет большое сходство с выше помещённым предложением 20 bis.

33. Лестница неопределённости. При доказательстве того, что всякое сложное число A измеряется простым числом, приём Евклида состоит в следующем: из предположения, что некоторое свойство Ω присуще числу A, он выводит существование числа $B < A$, обладающего этим свойством, затем числа $C < B < A$, обладающего тем же свойством Ω, и т. д., а затем устанавливается *конечность* такого ряда, как ряда *целых чисел*. Ферма [72]) выставляет этот приём как им впервые вводимый в теорию чисел. Он говорит, что в тех случаях, когда не помогают обычные приёмы доказательств, он находит совершенно особенные, которые называет: «la descente infinie ou indefinie».

Этот приём употребляется им, например, в «Observations sur Diophante». Он же употребляется и Лежандром в его «Теории чисел».

34. Другие доказательства предложения 31. В приложениях Гейберг поместил и другое доказательство предложения 31.

Иначе

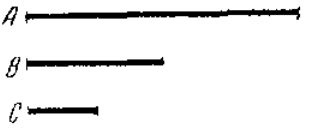
Пусть будет составное число A; я утверждаю, что оно измеряется каким-то первым числом (черт. 6).

Действительно, поскольку A составное, оно будет измеряться некоторым числом, и пусть наименьшее из его измеряющих будет B. Я утверждаю, что B будет первым. Действительно, если нет, то оно составное. Значит, оно будет измеряться каким-то

---

[72]) Fermat, Oeuvres, Paris, 1896, t. III, стр. 271.

числом. Пусть оно измеряется C. Значит, C будет меньше B. И поскольку C измеряет B, но B измеряет A, то значит, и C измеряет A, будучи меньше чем B, это же нелепо. Значит, B не будет составным. Значит, ⟨оно⟩ простое, что и требовалось доказать.



Черт. 6.

Другая форма доказательства, по изд. Энриквеса [73]:

«Если a составное, то имеет делителей. Пусть b наименьший делитель; я говорю, что b простое.

Действительно, если b составное, то существует какой-то делитель $c < b$, который делит a, что противно предположению (b — наименьший делитель); поэтому b простое».

Из этого положения вытекает единственность разложения на простые множители.

Дирихле рассуждает так.

$$m = pm', \quad \text{где } p \text{ простое},$$

$$m' = p'm'', \quad \text{где } p' \text{ простое},$$

значит,

$$m = pp'm'' \quad \text{и т. д.}$$

Если предположить, что существуют *два* разложения на простые множители

$$m = pp'p'' \ldots \text{ и } m = qq'q'' \ldots,$$

то произведение $pp'p'' \ldots$ должно делиться на $qq'q' \ldots$, что предполагает $p = q$, затем $p' = q'$ и т. д.

35. Евклидова теория наименьшего кратного. Последние семь предложений (33—39) книги VII посвящены теории нахождения общего наименьшего кратного, которая даётся в двух вариантах, в зависимости от целей, которые ставили себе авторы этой теории. Эти семь предложений распадаются на две группы: предложения 33—36 и 37—39.

В предложениях первой группы теория наименьшего кратного рассматривается при решении следующей задачи. Даны отношения, связывающие попарно значения нескольких величин, положим для определённости четырёх:

$$a:b, \quad c:d, \quad e:f.$$

Требуется подобрать такие числа A, B, C, D, чтобы все эти значения были связаны одной единственной пропорцией:

$$A:B:C:D,$$

---

[73]) Enriques, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Bologna, 1925—1932.

в которой число A должно заменить a, число B — оба числа b и c, число D — числа d и e, и, наконец, последнее число D должно заменить значение четвёртой величины f.

В последних трёх предложениях задача нахождения наименьшего кратного возникает в связи со следующей задачей — найти такое число, заданные аликвотные части которого выражались бы *целыми числами*.

При решении этих задач Евклид использует первые три предложения книги VII — метод нахождения наибольшего делителя. Интересно отметить, что во всех промежуточных предложениях — от 4-го до 32-го — алгорифм наибольшего делителя совершенно не применяется, если исключить предложение 4, где употребление его не вызывается необходимостью, и только в последних предложениях алгорифм Евклида играет очень существенную роль. И по стилю начало и конец книги довольно близки друг к другу; и там, и тут ставятся определённые задачи, для решения которых даются нужные методы. В промежуточной части книги никаких «задач» не решается.

Посмотрим теперь, как будут выглядеть в современной форме рассматриваемые семь предложений.

В *предложении 33* ставится следующая задача: *для заданных в любом количестве чисел найти наименьшие из имеющих с ними то же самое отношение*.

Задача решается в предположении трёх чисел A, B, C, не первых между собой. Находим D — общую наибольшую меру для A, B, C — и определяем числа E, I, H по равенствам

$$A = E \cdot D, \quad B = I \cdot D, \quad C = H \cdot D;$$

эти числа и будут наименьшими искомыми числами. Действительно, если бы существовали меньшие их числа G, K, L, измеряющие A, B, C, то имели бы место равенства

$$A = G \cdot M, \quad B = K \cdot M, \quad C = L \cdot M.$$

Сравнивая оба выражения для A, будем иметь:

$$E \cdot D = G \cdot M,$$

откуда, по предложению 19,

$$\frac{E}{G} = \frac{M}{D}.$$

Так как $E > G$, то и $M > D$, что невозможно, ибо D есть наибольшая общая мера для A, B, C.

В предложении 34 ставится задача нахождения общего наименьшего кратного двух чисел A, B.

Если A и B — первые между собой, то их произведение $A \cdot B = C$ будет искомым наименьшим кратным. В самом деле,

если было бы общее кратное D, меньшее C, то мы могли бы записать:

$$D = A \cdot E, \quad D = B \cdot I,$$

откуда (по предложению 19)

$$\frac{A}{B} = \frac{I}{E}.$$

Но так как A, B — первые между собой, то (по предложениям 20 и 21) они будут соответственно меньше I, E и будут делить их; таким образом,

$$B < E.$$

Теперь из двух равенств

$$AB = C, \quad AE = D$$

мы получаем (предложение 17)

$$\frac{B}{E} = \frac{C}{D};$$

поскольку же $B < E$, то и $C < D$, что противоречит сделанному предположению.

Если A, B не будут первыми между собой, то они заменяются наименьшими числами I, E, имеющими то же отношение (предложение 33):

$$\frac{A}{B} = \frac{I}{E}.$$

По предложению 19,

$$A \cdot E = B \cdot I = C.$$

Число C является общим кратным; для доказательства, что оно наименьшее, предположим, что существует общее кратное $D < C$; в таком случае можно написать:

$$A \cdot H = B \cdot G = D.$$

Из обоих этих равенств следует:

$$\frac{A}{B} = \frac{I}{E}, \quad \frac{A}{B} = \frac{G}{H}.$$

Так как I, E являются наименьшими, то $I < G$, $E < H$. Теперь из равенств

$$A \cdot E = C, \quad A \cdot H = D$$

заключаем

$$\frac{E}{H} = \frac{C}{D}.$$

Но если $E < H$, то и $C < D$, что противоречит сделанному предположению.

Предложение 35 гласит, что общее наименьшее кратное двух чисел измеряет всякое их общее кратное.

Пусть A, B — два числа, E — их наименьшее кратное, а CD — вообще некоторое кратное. Если CD не измеряется E, то мы можем написать:

$$CD = k \cdot E + CI,$$

где CI — меньший чем E остаток. Если теперь A, B измеряют CD и E, то они должны измерять и CI, что невозможно, ибо E, согласно предположению, является общим наименьшим кратным.

В *предложении 36* ставится задача о нахождении наименьшего кратного трёх чисел A, B, C. Для этой цели отыскивается наименьшее кратное D двух чисел A, B; если оно измеряется C, то и будет искомым общим наименьшим кратным чисел A, B, C.

Если же оно не измеряется C, то отыскивается E — общее наименьшее кратное C и D. Для доказательства, что E является искомым общим наименьшим кратным, делается противное предположение, что таким общим наименьшим кратным будет некоторое число $I < E$. Так как I будет общим кратным A, B, C, а значит, и A, B, то оно будет измеряться числом D — общим наименьшим кратным A и B; если же I есть общее кратное D и C, то оно будет измеряться и их наименьшим кратным E, что невозможно, ибо по предположению $I < E$.

Последняя группа теорем открывается двумя предложениями:

Предложение 37. Если число A измеряется каким-то числом B, то существует и выражающаяся целым числом часть A, соимённая с B.

Предложение 38. Если число A имеет какую-нибудь, выражающуюся целым числом, B-ю часть, то оно будет измеряться числом B.

В самом деле,

$$A = B \cdot C,$$

где C — некоторое целое число $\frac{A}{B}$, составляющее B-ю часть от A.

В последнем, *39 м предложении* ставится задача, найти наименьшее число, имеющее заданные части

Если эти части суть $\frac{1}{A}$, $\frac{1}{B}$, $\frac{1}{C}$, то искомое число представится общим наименьшим кратным A, B, C. В самом деле, оно будет делиться на A, B, C нацело и будет наименьшим числом, обладающим этим свойством. (*И. В*).

36. Последнее предложение книги VII. В «Приложении» ко второму тому издания Гейберга помещена следующая схолия к 39-му предложению:

«К 39 му. При наличии большого количества чисел, имеющих те же самые части, как если, например, будут даны $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, найти наименьшее число из всех имеющих с ними же те самые части. Найти число, которое, будучи наименьшим, имеет данные части $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$, $1/10$, $1/11$, $1/12$ и до бесконечности Должно теперь взять соимённые им числа, т. е. для половины 1, для трети 3, для четверти 4, и 5, и 6, и 7, 8, 9, 10, 11, 12 и помножить 1 на 3, получается 3; 3 на 4, получается 12, 12 на 5, получается 60; 60 на 6, получается 360; 360 на 7, получается 2520, оно имеет 10 частей $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/7$ и остальные. Затем умножить его на 11; получается 27 720; это число имеет данные части $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, $1/6$, $1/7$, $1/8$, $1/9$, $1/10$, $1/11$, $1/12$ Для всех заданных ⟨частей⟩ должно таким образом перемножать и искать наименьшее число, имеющее такие части».

Эта схолия к 39-му предложению, помещённая Гейбергом в Приложениях» к тексту Евклида, достаточно ясно характеризует не очень высокий уровень вычислительной математики автора. Она, конечно, имеет значительно более позднее происхождение.

В 39-м предложении сам Евклид *не мыслит дробями*. Иначе поставленная задача совпадала бы с задачей предложения 34.

Ведь в той и другой предлагается найти наименьшее кратное двух чисел a и b: $M(a, b)$.

Если мы под τα δοθέντα μέρη будем разуметь числа, *которые должны быть частями* искомого числа M, то обе проблемы вполне совпадают, так как *измерять и быть частями*, на основании предложения 3 книги VII, одно и то же.

Но Евклид здесь разумеет то, что искомое число должно быть таким, что для него должна существовать треть, четверть, пятая часть или (так как, повторяю, Евклид не пользуется дробями), вернее сказать, таким числом, которое измерялось бы единицами трёх, четырёх, пяти.

Для 34-го предложения

$$M = am = bn = cp;$$

a, b, c даны, ищутся m, n, p и M такие, чтобы ***M* было *наименьшее***.

Для 39-го предложения

$$M = ma = nb = pc;$$

m, n, p даны, ищутся a, b, c и M так, чтобы M было *наименьшее*.

37. Обозначения дробей. Согласно сказанному нами выше можно с уверенностью сказать, что это прибавление *не принадлежит Евклиду*, что вполне признает и Гейберг, помещая это добавление в Appendix. Я обозначаю дробь по-современному.

Греки употребляют следующие обозначения целых чисел. Они обозначают их буквами по следующей таблице:

α	β	γ	δ	ε	ϛ	ζ	η	θ
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	ο	π	ϟ
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ	σ	τ	υ	φ	χ	ψ	ω	ϡ
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Примеры употребления: τλδ = 334, φξη = 568, ιθ = 19.

Доли $\frac{1}{n}$ обозначают так же, как целые числа в знаменателе, но только с коммой наверху:

$$\frac{1}{2} = \beta', \quad \frac{1}{3} = \gamma', \quad \frac{1}{4} = \delta', \quad \frac{1}{5} = \varepsilon' \quad \text{и т. д.}$$

Для обозначения дроби с числителем, отличным от единицы, Архимед и Эвтокий[74]) пишут знаменатель вправо от числителя, но не отделяя их чертой, так,

$$\bar{\theta}^{\iota\alpha} \text{ или } \theta^{\iota\alpha} \text{ означало } \frac{9}{11}.$$

Приведём обозначение Диофанта[75]):

$$\gamma\cdot\xi\,\chi\kappa\alpha^{\beta\,\psi\delta^{\sim}}$$

Числитель следует читать так:
γ. = 30 000, т. е. 3 мириады (точка отмечает увеличение в 10 000 раз против γ);
ξ, = 6000 (чёрточка означает увеличение в 1000 раз против ξ)
χκα = 621, так что числитель = 36 621.

Знаменатель: β = 2000, ψδ = 704, β,ψδ~ = 2704.

Вся дробь $\frac{36621}{2704}$.

Ламберти в своём переводе Евклида и комментариях к предложению 14 книги VIII пользуется вместо греческих латинскими буквами.

38. Седьмая книга «Начал» в алгебраической символике. Бесспорно, что перекладывание Евклида на алгебраический язык *искажает* его в большей или меньшей мере.

В особенности это искажение имеет место, когда *часть* истолковывается как *доля* $\frac{1}{m}$, а *части* — как *дробь* $\frac{n}{m}$. Именно при

---

[74]) Archimedis opera omnia cum commentariis Eutocii ed. Heiberg, 1910.

[75]) См. примеч. 15.

таком истолковании и делается перевод Евклида на алгебраический язык Эьриквесом и Хизсом в то время, как старые авторы, не проектирующие настоящее в прошлое, воздерживаются от такого перевода.

Например, 4-е предложение переводится так:

Даны два числа a и b; всегда можно написать $b = \frac{a}{m}$ или $b = a\frac{n}{m}$, причём под $\frac{1}{m}a$ и $a \cdot \frac{n}{m}$ разумеются целые числа. Выводится это из того, что если g — общий наибольший делитель a и b, то $a = gm$ и $b = gn$, откуда и следуют наши равенства.

Конечно, при таком переводе предполагается, что Евклид мыслит *дробями*. Но если мыслить дробями *так, как мы мыслим*, то является совершенно ненужным то, что говорит Евклид. Если дробь $\frac{a}{b}$ есть *результат деления* a на b, то ясно, что $a = b \cdot \frac{a}{b}$, или $b = a \cdot \frac{b}{a}$. Если же установить сперва понятие о доле и рассматривать дробь как целое число долей, то из b следует взять 1 как долю $\frac{1}{b}$; $\frac{a}{b}$ получится, если взять a таких долей.

Цейтен, видя в мыслях Евклида тоже дробь, даёт этому, с нашей точки зрения представляющемуся пустым, рассуждению содержание, утверждая, что вместо $\frac{a}{b}$ здесь разумеется дробь $\frac{m}{n}$, обязательно *приведённая*, т. е. уже не сократимая.

Но едва ли это правильно, так как понятие об отношении с наименьшими членами Евклидом даётся позже и вовсе не включается в определение частей.

Равенством $a = gm$ переводится евклидово «a измеряется числом g», равенством $b = gn$ — «b измеряется тем же числом g», и если a не измеряет b, то два таких равенства говорят, что a не измеряется b, но g, измеряя a, измеряет b. Всё это не выражается *вполне* нашей символикой и точно может быть выражено только *риторически*.

Перевод и других предложений VII книги на алгебраический язык не следует считать *вполне* точным. Но для понимания Евклида этот перевод является очень полезным. Он помогает разобраться в многоречивых выводах Евклида, так как каждому суждению отвечает формула, хотя и не вполне выражающая его смысл по Евклиду.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ VIII

1. Непрерывная пропорция. Первые десять предложений восьмой книги посвящены общей теории непрерывной пропорции. Под этим именем подразумевается ряд чисел a, b, c, d..., стоящих между собой в одном и том же отношении:

$$a:b = b:c = c:d \text{ и т. д.}$$

Мы назвали бы эту последовательность геометрической прогрессией, но не нужно забывать, что между нашей геометрической прогрессией и евклидовой непрерывной пропорцией имеется очень существенная разница. Наша геометрическая прогрессия представляет ряд определенным образом между собой связанных *членов*; эти члены имеют вполне самостоятельное существование, так что мы можем говорить об их сумме; связывающие их отношения представляют лишь закон получения этих членов — закон, который мы, если угодно, могли бы и изменить. В евклидовской непрерывной пропорции, наоборот, первенствующее значение имеет именно этот закон: составляющие непрерывную пропорцию числа служат только для его выражения и вполне могут быть без малейшего ущерба заменены другими, лишь бы отношение соседних членов оставалось неизменным; говорить о суммировании таких членов просто не имеет смысла. С такого рода непрерывными пропорциями грекам приходилось сталкиваться при выработке математической теории музыки, ряд тонов одного названия, принадлежащих последовательным октавам, представляет пример непрерывной пропорции с отношением 1:2. Установление простейших форм числового выражения таких соотношений и составляет основную задачу первых предложений рассматриваемой книги.

В первом и третьем предложениях устанавливаются основные свойства таких соотношений: для того чтобы они выражались наименьшими числами, необходимо, чтобы крайние их члены были первыми между собой.

Первое предложение доказывает прямую теорему: если крайние члены будут взаимно простыми (первыми), то выражающие эти отношения числа будут наименьшими.

Доказательство основывается на предложениях 20 и 21 книги VII.

Пусть A, B, C, D составляют непрерывную пропорцию

$$A:B=B:C=C:D,$$

причём A и D являются первыми между собой. Пусть существуют меньшие их числа E, I, H, G, удовлетворяющие соотношениям

$$A:B:C:D=E:I:H:G.$$

Тогда «по равенству» (предложение 14 книги VII):

$$A:D=E:G.$$

Если A и D - первые между собой, то, на основании предложения 21 книги VII, они будут и наименьшими; если же они наименьшие, то, на основании предложения 20 книги VII, должны делить, соответственно, E и G, что невозможно. Теорема доказана.

Второе предложение даёт способ получения этих наименьших чисел, выражающих заданные отношения.

Пусть заданное отношение в наименьших числах будет $A:B$, и требуется составить непрерывную пропорцию из четырёх членов. Евклид строит ряд чисел

$$C=A^2,\ D=A\cdot B,\ E=B^2;$$
$$I=A^3,\ H=A^2\cdot B,\ G=A\cdot B^2,\ K=B^3,$$

и на основании предложений 17 и 18 книги VII легко доказывает, что они будут находиться между собой в заданном отношении $A:B$.

Для того чтобы доказать, что найденные числа I, H, G, K будут наименьшими, Евклид замечает на основании предложения 22 книги VII, что A и B должны быть первыми между собой. Но тогда на основании предложения 27 книги VII будут первыми между собой $I=A^3$ и $K=B^3$; если же они первые между собой, то вследствие предложения 1 рассматриваемой книги они будут и наименьшими.

Третье предложение, являющееся обратным по отношению к первому, обобщает предложение 22 книги VII, доказанное только для двух чисел.

Пусть заданная, выраженная в наименьших числах, непрерывная пропорция будет

$$A.B:C:D.$$

Требуется доказать, что A и D будут первыми между собой.

Находим наименьшие числа E, I, выражающие данное отношение (предложение 33 книги VII); они будут первыми между собой (согласно предложению 22 книги VII). После этого по 2-му предложению строим системы чисел

$$H=E^2,\ G=E\cdot I,\ K=I^2;$$
$$L=E^3,\ M=E^2\cdot I,\ N=E\cdot I^2,\ X=I^3.$$

Так как L, X будут первыми между собой, то они, согласно предложению 1, явятся и наименьшими. Но тогда системы чисел A, B, C, D и L, M, N, X совпадут между собой, и мы будем иметь:

$$A = L = E^3, \quad B = M = E^2 \cdot I, \quad C = N = E \cdot I^2, \quad D = X = I^3.$$

Так как E^3 и I^3 будут первыми между собой, то такими же окажутся и A с D. Теорема доказана.

В четвёртом предложении термин «в непрерывной пропорции» (наше «непрерывно пропорциональные») понимается уже несколько в ином смысле.

Дано несколько отношений $\frac{A}{B}$, $\frac{C}{D}$, $\frac{E}{I}$; требуется построить такие четыре наименьших числа N, X, M, O, чтобы имели место пропорции:

$$\frac{A}{B} = \frac{N}{X}, \quad \frac{C}{D} = \frac{X}{M}, \quad \frac{E}{I} = \frac{M}{O}.$$

Искомые числа строятся таким образом. Так как B — последующее в первом отношении — должно соответствовать C — предыдущему во втором отношении —, то возьмём H — наименьшее кратное B и C (предложение 34 книги VII); это наименьшее кратное будет соответствовать второму из определяемых нами чисел. Первое G и третье K определятся из пропорций:

$$\frac{A}{B} = \frac{G}{H}, \quad \text{откуда} \quad G = \frac{AH}{B} = A \cdot \frac{H}{B},$$

$$\frac{C}{D} = \frac{H}{K}, \quad \text{откуда} \quad K = D \cdot \frac{H}{C}.$$

Три найденных числа G, H, K удовлетворяют двум первым пропорциям. Чтобы удовлетворялась и последняя пропорция, надо найти такое L, чтобы было

$$\frac{E}{I} = \frac{K}{L},$$

откуда

$$L = I \cdot \frac{K}{E}.$$

Если $\frac{K}{E}$ есть целое число, то задача уже решена; остаётся лишь доказать, что найденные числа G, H, K, L являются наименьшими. Доказательство ведётся от противного. Пусть наименьшие числа, удовлетворяющие нашим отношениям, будут N, X, M, O; тогда

$$\frac{A}{B} = \frac{N}{X}, \quad \frac{C}{D} = \frac{X}{M}.$$

Так как A, B и C, D суть наименьшие числа, выражающие отношения $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$, то они должны делить соответственно N, X и X, M. Значит, X должно делиться, с одной стороны, на B, с другой — на C. По предложению 35 книги VII оно должно тогда делиться на наименьшее кратное H для B, C, что невозможно, ибо мы предположили $X < H$. Таким образом G, H, K, L будут искомые наименьшие числа.

Предположим теперь, что K не делится на E. Тогда возьмём M — наименьшее кратное E, K и образуем ряд чисел:

$$N = G \cdot \frac{M}{K}, \quad X = H \cdot \frac{M}{K}, \quad M, \quad O = I \cdot \frac{M}{E}.$$

Числа G, H, K заменятся теперь N, X, M; вместо последнего же L мы берём новое O. Нетрудно видеть, что четыре числа N, X, M, O будут искомыми; действительно:

$$\frac{N}{X} = \frac{G}{H} = \frac{A}{B}, \quad \frac{X}{M} = \frac{H}{K} = \frac{C}{D}, \quad \frac{M}{O} = \frac{E}{I}.$$

Остаётся доказать, что они будут и наименьшими. Доказательство опять ведётся от противного. Предположим, что существует система меньших чисел P, R, S, T, удовлетворяющих поставленным отношениям, и рассмотрим таблицу чисел:

A	B,C	D,E	I
G	H	K	L
N	X	M	O
P	R	S	T

Так как A, B суть наименьшие числа, выражающие отношение $A:B$, а C, D — наименьшие числа отношения $C:D$, то на основании предложения 20 книги VII, число R должно будет делиться на B и C, а значит, и на их наименьшее кратное H (предложение 35 книги VII). Отношение $\frac{H}{R}$ мы можем найти из таких соображений. Мы имеем

$$\frac{H}{K} = \frac{C}{D} = \frac{R}{S},$$

значит,

$$\frac{H}{R} = \frac{K}{S}.$$

Таким образом, S должно делиться на K. А так как $\frac{S}{T} = \frac{E}{I}$ и E, I суть наименьшие числа, выражающие это отношение, то S должно делиться и на E, иными словами — на наименьшее кратное K и E, т. е. M, что противоречит предположению $M > S$.

Таким образом, P, R, S, T не будут меньше N, X, M, O; значит, определённые нами числа N, X, M, O и будут искомыми наименьшими числами, выражающими заданные отношения. *(И. В.)*

2. Сложное отношение. В подробных учебниках арифметики упоминается о так называемых сложных отношениях, под которыми подразумевается произведение двух и более отношений. Сложным отношением, составленным из двух отношений $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, называется отношение $\frac{ac}{bd}$, предыдущий член которого равняется произведению предыдущих членов «складываемых» отношений, а последующий — произведению их последующих. В настоящее время, когда отношение в известной степени сопоставляется с дробью, «сложение» отношений сводится к простому перемножению выражающих их дробей, так что сложные отношения теряют своё право на самостоятельное существование. В греческой математике дело обстояло иначе. Сложное отношение, буквально «сложенное» (συγκείμενον) из двух отношений, имело большое значение в теории. Если оба «складываемые» отношения были одинаковы, то в результате получалось двойное отношение (διπλάσιον), под которым, однако, надо подразумевать не удвоенное, но возведённое в квадрат первоначальное отношение. Точно так же, тройным (τριπλάσιον) отношением называлось не утроенное первоначальное отношение, но возведённое в третью степень. Разгадка этой математической несуразности заключается в том, что практическое приложение теории отношений имело место в построении теории музыки. Действительно, мы говорим, что музыкальный интервал в октаву (2:1) равняется сумме кварты (4:3) и квинты (3:2); однако для того, чтобы получить октаву, надо не сложить дроби, выражающие кварту и квинту, но их перемножить:

$$\frac{2}{1}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}.$$

Пятое предложение даёт в общем виде положение, частным случаем которого является предложение 11.

Пусть даны два числа $A=C\cdot D$ и $B=E\cdot I$; требуется доказать, что

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{E}\cdot\frac{D}{I}.$$

Согласно предложению 4, находим такие три числа H, G, K, чтобы имели место соотношения

$$\frac{C}{E}=\frac{H}{G} \quad \text{и} \quad \frac{D}{I}=\frac{G}{K}.$$

Если мы образуем число $L = D \cdot E$, то по предложению 17 книги VII можем написать:

$$\left.\begin{matrix} D \cdot E = L \\ D \cdot C = A \end{matrix}\right\}, \text{ откуда } \frac{C}{E} = \frac{A}{L} = \frac{H}{G}.$$

Аналогично, из равенств

$$D \cdot E = L,$$
$$I \cdot E = B$$

следует:

$$\frac{D}{I} = \frac{L}{B} = \frac{G}{K}.$$

Но если

$$\frac{A}{L} = \frac{H}{G} \quad \text{и} \quad \frac{L}{B} = \frac{G}{K},$$

то «по равенству» (предложение 14 книги VII)

$$\frac{A}{B} = \frac{H}{K}.$$

Но

$$\frac{H}{K} = \frac{H}{G} \cdot \frac{G}{K} = \frac{C}{E} \cdot \frac{D}{I},$$

что и доказывает теорему. (*И. В.*)

3. Шестое предложение и схолии Клавия. Пусть дано, что

$$A:B = B:C = C:D = D:E,$$

причём B не представляет кратного A; требуется доказать, что ни в какой паре взятых чисел последующее не будет кратным предыдущего.

Это положение является очевидным для каждой пары чисел, входящих в одно и то же отношение; докажем, что оно будет иметь место и для каждой пары чисел, входящих в разные отношения, например, для чисел A и C.

Если C является кратным A, то для трёх чисел A, B, C, составляющих непрерывную пропорцию, можно подобрать меньшие числа, находящиеся в тех же отношениях. Пусть наименьшие такие числа (предложение 33 книги VII) будут I, H, G:

$$A:B = B:C = I:H = H:G.$$

Если I, H, G являются наименьшими, то, по предложению 3, крайние I, G должны быть первыми между собой, причём I не может быть единицей, так как отношение $H:I = B:A$ не является целым числом. Применяя предложение 14 книги VII, мы заключаем, что

$$A:C = I:G,$$

т. е. C и A имеют между собой отношение $G:I$, не выражающееся целым числом, что противоречит предположению. (*И. В.*)

Клавий[1]) даёт следующие схолии к 6-му предложению Евклида, которые лучше назвать королляриями:

(1) Если в непрерывной пропорции

$$a:b = b:c = c:d = d:e$$

первый член a не будет кратным второго b, то и второй b не будет кратным третьего c, а третий c не будет кратным четвёртого d.

(2) Если второй член b будет кратным первого a, то и третий член c будет кратным второго b, а четвёртый d кратным третьего c.

(3) Если в непрерывной пропорции

$$a:b = b:c = c:d = d:e$$

члены c, d, e не будут кратными a, то и второй член b не будет кратным a.

Следуя Клавию, мы докажем только, что *если первое измеряет второе, то и каждое из следующих будет измеряться первым.*

То, что a, b, c, d последовательно измеряют друг друга — очевидно. Действительно, если a измеряет b, а b измеряет c, то и a будет измерять c. По той же причине и b должно измерять d. Но если a измеряет b, то значит, оно будет измерять и d. Значит, a измеряет каждое из b, c, d.

4. Предложения 8—10 и схолии Клавия. Предложения 8—10 образуют замкнутую группу, выделяющуюся из среды остальных своей терминологией; в то время как в остальных предложениях для непрерывной пропорции употребляется термин ἑξῆς ἀνάλογον (= последовательно пропорциональные), в рассматриваемых предложениях числа в этой пропорции называются κατὰ τὸ συνεχὲς ἀνάλογον (= связно или непрерывно пропорциональны) *).

Предложение 8, являющееся вводным к двум следующим, говорит, что если между двумя числами A и B можно вставить в непрерывной пропорции несколько чисел (подразумевается обязательно целых), то ровно столько же чисел можно вставить в непрерывной пропорции и между двумя числами E, I, находящимися между собой в том же отношении, что и первоначальные числа A и B.

Идея доказательства заключается в том, что мы сначала заменяем заданные, находящиеся в непрерывной пропорции числа $A:C:D:B$ наименьшими числами, находящимися в том же отно-

---

[1]) Clavius, Opera Mathematica, Moguntiae, 1612.

*) Употребление того же термина в предложении 25 объясняется тем, что в нём просто цитируется формулировка предложения 8.

шении $H:G:K:L$ (предложение 33 книги VII). На основании предложения 3 мы можем утверждать, что крайние числа H и L будут первыми между собой. Но если так, то мы можем утверждать, что в пропорции

$$H:L=A:B=E:I$$

наименьшие числа H, L на основании предложений 20 и 21 книги VII будут делить соответственно E и I.

Пусть

$$E=kH, \quad I=kL,$$

где k — некоторое целое число.

Если теперь мы увеличим в k раз числа H, G, K, L, то получим непрерывную пропорцию

$$kH:kG:kK:kL,$$

крайними членами которой будут как раз наши числа $E=kH$ и $I=kL$; между этими числами оказались вставленными в непрерывной пропорции два числа $M=kG$ и $N=kK$, что и требовалось доказать.

Предложение 9 утверждает, что если между двумя первыми между собой числами A и B удалось вставить в непрерывной пропорции несколько чисел — допустим два числа C и D —, то ровно столько же чисел можно вставить в непрерывной пропорции между каждым из этих чисел и единицей.

Идея этого предложения тесно связана с предложениями 11 и 12, которые являются частными случаями рассматриваемых предложений 9 и 10. Два числа, являющиеся первыми между собой, будут A^3 и B^3, между которыми можно вставить два средних пропорциональных A^2B и AB^2:

$$A^3:A^2B:AB^2:B^3.$$

В таком случае между каждым из чисел A^3, B^3 и единицей можно вставить тоже по два средних пропорциональных:

$$1:A:A^2:A^3,$$
$$1:B:B^2:B^3.$$

Доказательство развивается так:

Имеем непрерывную пропорцию

$$A:C:D:B.$$

Ищем наименьшие числа, выражающие те же отношения (предложение 2); пусть это будут I и H.

$$I:H=A:C=C:D=D:B.$$

Если два наименьших числа в заданном отношении будут I и H, то три числа будут

$$I^2 (= G) : I \cdot H (= K) : H^2 (= L),$$

а четыре числа

$$I^3 (= M) : I^2 \cdot H (= N) : I \cdot H^2 (= X) : H^3 (= O).$$

Так как крайние из наименьших чисел, выражающих данные отношения, будут первыми между собой, то системы A, C, D, B и M, N, X, O должны быть тождественными между собой.

Если E единица, то мы имеем:

$$I \cdot I = G, \quad I^3 = I \cdot G = M = A,$$
$$E \cdot I = I; \qquad E \cdot I = I.$$

Из этих равенств вытекает:

$$\frac{E}{I} = \frac{I}{G}, \quad \frac{E}{I} = \frac{G}{M},$$

т. е. что имеет место непрерывная пропорция

$$E : I : G : M \quad (M = A),$$

значит, между E и A можно вставить два средних пропорциональных I и G.

Аналогично из равенств:

$$H \cdot H = L, \quad H^3 = L \cdot H = O = B,$$
$$E \cdot H = H, \qquad E \cdot H = H$$

получим

$$\frac{E}{H} = \frac{H}{L}, \quad \frac{E}{H} = \frac{L}{O},$$

т. е. имеет место и такая непрерывная пропорция:

$$E : H : L : O \quad (O = B).$$

Десятое предложение является обратным предыдущему:

Если между единицей и числами A, B можно вставить несколько (например, два) средних пропорциональных, то столько же средних пропорциональных можно вставить и между самими A и B.

Если $C = 1$ и между C и A вставлены средние пропорциональные D, E, а между C и B вставлены I, H, то мы имеем

$$C : D : E : A. \quad C : I : H : B.$$

Так как

$$\frac{A}{E} = \frac{E}{D} = \frac{D}{C} = D,$$

то мы имеем:

$$E = D^2, \quad A = D^3.$$

Аналогично,

$$H = I^2, \quad B = I^3,$$

так что две указанные пропорции будут иметь вид:

$$C : D : D^2 (= E) : D^3 (= A),$$
$$C : I : I^2 (= H) : I^3 (= B).$$

Образуем ряд чисел:

$$D \cdot I = G, \quad D \cdot G = (D^2 I) = K, \quad IG = (DI^2) = L.$$

После этого будем иметь:

$$\left.\begin{matrix} D \cdot D = E \\ D \cdot I = G \end{matrix}\right\} \frac{D}{I} = \frac{E}{G},$$

$$\left.\begin{matrix} D \cdot I = G \\ I \cdot I = H \end{matrix}\right\} \frac{D}{I} = \frac{G}{H}, \quad \frac{E}{G} = \frac{G}{H};$$

$$\left.\begin{matrix} D \cdot E = A \\ D \cdot G = K \end{matrix}\right\} \frac{E}{G} = \frac{A}{K}, \quad \frac{E}{G} = \frac{D}{I}, \quad \frac{D}{I} = \frac{A}{K};$$

$$\left.\begin{matrix} D \cdot G = K \\ I \cdot G = L \end{matrix}\right\} \frac{D}{I} = \frac{K}{L}, \quad \frac{D}{I} = \frac{A}{K}, \quad \frac{A}{K} = \frac{K}{L};$$

$$\left.\begin{matrix} I \cdot G = L \\ I \cdot H = B \end{matrix}\right\} \frac{G}{H} = \frac{L}{B}, \quad \frac{G}{H} = \frac{D}{I}, \quad \frac{D}{I} = \frac{L}{B}, \quad \frac{K}{L} = \frac{L}{B}.$$

Мы получили непрерывную пропорцию

$$A : K = K : L = L : B.$$

Таким образом, между A и B вставлено два средних пропорциональных K и L, что и требовалось доказать. (*И. В.*)

Упомянем без доказательства схолии Клавия (которые можно назвать короллариями) к предложениям 8—10.

1. Если имеются две непрерывные пропорции, начинающиеся с единицы, то третьи члены их находятся в двойном отношении вторых, четвёртые члены в тройном отношении и т. д.:

$$1 : a : a^2 : a^3 : \ldots$$
$$1 : b : b^2 : b^3 : \ldots$$

2. Если между двумя числами и некоторым третьим находятся числа в непрерывной пропорции, то сколько попадает их между каждым из них и третьим, столько же попадёт их в непрерывной пропорции и между двумя первоначально взятыми числами.

Это последнее предложение представляет естественное обобщение десятого предложения восьмой книги Евклида.

5. Среднее пропорциональное. Предложения 11 и 12 занимают центральное место во всей VIII книге, представляя её наиболее древнюю часть. В этих предложениях впервые в истории математики устанавливается понятие о среднем геометрическом. В то время как среднее арифметическое было хорошо известно древним вавилонянам, представляя одно из наиболее общих понятий их математической теории, нужно было ждать греческой эпохи, чтобы среднее геометрическое заняло подобающее место в науке. Происхождение этого понятия можно объяснить так.

Мы видели, что целочисленные пропорции играли большую роль в греческой музыкальной теории, где музыкальные интервалы выражались отношениями и сложение интервалов оказывалось равносильным умножению выражающих их отношений; таким образом, в греческую математическую терминологию вошли понятия о двойном и тройном отношении — двукратном и троекратном повторении взятого интервала. Если теперь мы поставили бы задачу о делении интервала на две или на три части, то мы совершенно естественно пришли бы к понятию об одном и двух средних пропорциональных. Действительно, разделить пополам интервал $\frac{a}{1}$, значило бы найти такой интервал $\frac{x}{1}$, чтобы

$$\left(\frac{x}{1}\right)^2=\frac{a}{1},$$

откуда $x=\sqrt{a}$. Точно так же, деление интервала на три равные части равносильно было определению x из уравнения

$$\left(\frac{x}{1}\right)^3=\frac{a}{1}.$$

Греческие математики установили, что эти уравнения имеют выражающиеся в целых числах решения, если первоначальный интервал выражался отношением двух квадратов (при делении на два) или двух кубов (при делении на три). Соответствующие решения имели такой вид:

$$\frac{A^2}{B^2}=\frac{A^2}{AB}\times\frac{AB}{B^2},$$

$$\frac{A^3}{B^3}=\frac{A^3}{A^2B}\times\frac{A^2B}{AB^2}\times\frac{AB^2}{B^3}.$$

Можно установить приблизительно время, когда были найдены эти соотношения. Так как Гиппократ Хиосский, живший не позднее последней четверти V века до н. э., уже знал последнее соотношение, сведя задачу об удвоении куба к нахождению двух средних пропорциональных, то интересующие нас отношения

были установлены самое позднее в середине V века, причём вряд ли могут быть какие-нибудь сомнения относительно среды, в которой сложились эти представления: это могли быть только пифагорейские круги западной Греции, в которых была выработана математическая теория музыки, основой которой служат VII—IX книги Евклида.

В *предложении 11* говорится, что между двумя квадратными числами можно вставить одно среднее пропорциональное.

Пусть имеются два числа $A = C^2$, $B = D^2$. Построим число $E = C \cdot D$. Тогда из соотношений

$$C \cdot C = A,$$
$$C \cdot D = E$$

получаем:

$$\frac{C}{D} = \frac{A}{E};$$

аналогично, из соотношений

$$C \cdot D = E,$$
$$D \cdot D = B$$

найдём:

$$\frac{C}{D} = \frac{E}{B}.$$

Сравнивая эти пропорции, получим:

$$\frac{A}{E} = \frac{E}{B}.$$

Таким образом, E будет средним пропорциональным для A и B.

Затем нужно доказать, что отношение двух квадратных чисел равно двойному отношению сторон этих чисел. Собственно говоря, это следует из более общей теоремы, установленной в предложении 5; то обстоятельство, что в предложениях 11 и 12 эти положения специально доказываются, служит характерным признаком более позднего происхождения предложения 5. Упомянутое положение, выражающееся равенством

$$\frac{A^2}{B^2} = \left(\frac{A}{B}\right)^2,$$

является для нас очевидным; для греческих же математиков, не дававших вполне отчётливой формулировки правилу умножения дробей, это положение приходилось специально доказывать. Идея этого доказательства заключается в применении средних пропорциональных. Мы имеем:

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{A^2}{E} \times \frac{E}{B^2} = \frac{A^2}{E} \times \frac{A^2}{E} = \left(\frac{A^2}{E}\right)^2,$$

поскольку же

$$\frac{A^2}{E} = \frac{A^2}{A \cdot B} = \frac{A}{B},$$

то

$$\frac{A^2}{B^2} = \frac{A}{B} \times \frac{A}{B} = \left(\frac{A}{B}\right)^2.$$

В *предложении 12* устанавливается аналогичное положение для кубических чисел, между которыми вставляются два средних пропорциональных.

Пусть заданные кубические числа будут $A = C^3$ и $B = D^3$. Строим последовательно числа:

$$C \cdot C = E, \quad C \cdot D = I, \quad D \cdot D = H,$$
$$C \cdot I = C^2 \cdot D = G, \quad D \cdot I = C \cdot D^2 = K.$$

Последовательно получаем:

$$\left.\begin{matrix} C \cdot C = E \\ C \cdot D = I \end{matrix}\right\} \qquad \frac{C}{D} = \frac{E}{I};$$

$$\left.\begin{matrix} C \cdot D = I \\ D \cdot D = H \end{matrix}\right\} \qquad \frac{C}{D} = \frac{I}{H};$$

$$\left.\begin{matrix} C \cdot E = A \\ C \cdot I = G \end{matrix}\right\} \qquad \frac{E}{I} = \frac{A}{G}; \qquad \frac{C}{D} = \frac{A}{G};$$

$$\left.\begin{matrix} C \cdot I = G \\ D \cdot I = K \end{matrix}\right\} \qquad \frac{C}{D} = \frac{G}{K};$$

$$\left.\begin{matrix} D \cdot I = K \\ D \cdot H = B \end{matrix}\right\} \qquad \frac{I}{H} = \frac{K}{B}; \qquad \frac{C}{D} = \frac{K}{B}.$$

Из этих равенств вытекает:

$$\frac{A}{G} = \frac{G}{K} = \frac{K}{B},$$

т. е. между A и B вставлены два средних пропорциональных G и K.

Что кубические числа находятся в тройном отношении сторон, доказывается аналогично предложению 11-му:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{G} \times \frac{G}{K} \times \frac{K}{B} = \left(\frac{A}{G}\right)^3.$$

Но $A : G = C : D$; значит,

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{C}{D}\right)^3.$$

То обстоятельство, что греческая теоретическая арифметика не знала нашего правила умножения дробей, было причиной того, что пришлось довольно громоздко доказывать для нас почти очевидное положение, выражаемое *предложением 13*.

Если A, B, C составляют непрерывную пропорцию, то будут составлять непрерывную пропорцию и A^2, B^3, C^2, а также A^3, B^3, C^3.

Доказательство заключается в том, что мы последовательно образуем системы средних пропорциональных.

Пусть $A^2 = D$, $B^2 = E$, $C^2 = I$.

Строим числа

$$A \cdot B = L, \quad B \cdot C = X.$$

Тогда последовательно будем иметь:

$$D:L:E = A^2:AB:B^2,$$
$$E \cdot X:I = B^2:BC:C^2.$$

Так как общее отношение в первой пропорции равно $A:B$, а во второй $B:C$, причём A, B, C составляют непрерывную пропорцию

$$A \cdot B = B:C,$$

то мы получим по равенству:

$$D:E = A^2 \cdot B^2, \quad E:I = B^2:C^2,$$

т. е. что $D = A^2$, $E = B^2$, $I = C^2$ составляют непрерывную пропорцию.

Аналогично доказывается теорема и для кубов:

$$A^3 = H, \quad B^3 = G, \quad C^3 = K.$$

Образуем систему чисел

$$A \cdot L = A^2 \cdot B = M, \quad B \cdot L = A \cdot B^2 = N,$$
$$B \cdot X = B^2 \cdot C = O, \quad C \cdot X = B \cdot C^2 = P.$$

В таком случае:

$$H:M:N:O = A^3:A^2B:AB^2:B^3,$$
$$G:O:P:K = B^3:B^2C:BC^2:C^3.$$

Отсюда

$$H:G = G:K,$$

т. е. $H = A^3$, $G = B^3$, $K = C^3$ образуют непрерывную пропорцию. (*И. В.*)

6. Иррациональность квадратного и кубичного корней. Можно сказать, что предложения 14, 15, 16, 17 содержат в зародыше то, из чего впоследствии развилась теория иррациональных корней.

В *предложении 14* утверждается, что если квадратное число делится на квадратное число, то и отношение корней будет тоже целым числом, и обратно.

Пусть $A = C^2$, $B = D^2$ и $\frac{B}{A}$ есть целое число; требуется доказать, что и $\frac{D}{C}$ будет целым числом.

Образуем среднее пропорциональное $E = C \cdot D$; в таком случае будем иметь непрерывную пропорцию

$$A : E = E : B.$$

На основании предложения 7, если A делит B, то оно должно разделить и E; значит, $\frac{A}{E}$ будет целое число. Но $A : E = C^2 : C \times \times D = C : D$; значит, и $\frac{C}{D}$ будет целым числом.

Доказательство обратного предложения не представляет затруднений.

В *предложении 15* утверждается то же самое для случая кубов.

Пусть $A = C^3$, $B = D^3$ и $\frac{B}{A}$ = целое; доказать, что и $\frac{D}{C}$ будет целым числом.

Строим систему чисел:

$$C^2 = E, \quad C \cdot D = I, \quad D^2 = H,$$
$$C \cdot I = C^2 \cdot D = G, \quad D \cdot I = C \cdot D^2 = K.$$

В таком случае

$$E : I = I : H = C : D;$$
$$A : G = G : K = K : B = C : D.$$

Если A делит нацело B, то, по предложению 7, оно разделит и G; значит, $\frac{G}{A} = \frac{D}{C}$ будет целым числом, что и требовалось доказать.

Предложения 16 и 17 легко доказываются от противного.

Из них мы легко выведем, что если N не есть точный квадрат (или, соответственно, куб), то квадратный (или кубичный) корень не может выражаться целым числом.

Действительно, если N не есть такой квадрат, но является целым числом, то квадратный корень из него, очевидно, не может быть целым числом. Пусть он выражается рациональной дробью $\frac{a}{b}$. Мы можем рассматривать a и b как стороны двух квадратов. Если $\frac{a}{b}$ не есть целое число, то и $\frac{a^2}{b^2}$ не может быть целым числом, что противно предположению, что $N = \frac{a^2}{b^2}$ есть целое число.

Аналогично доказывается соответствующее предложение и для случая кубичных корней.

Нужно, однако, заметить, что доказательность этого рассуждения основывается на том, что предполагается известным пра-

вило умножения дробей $\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$; предполагать же это для греческой теоретической арифметики мы не имеем права. (*И. В.*)

7. Подобные числа. Предложения 18 и 19 представляют естественные обобщения предложений 11 и 12.

В *предложении 18* утверждается, что между двумя подобными плоскостными числами можно вставить одно среднее пропорциональное.

Пусть будут два плоскостных числа $A = C \cdot D$ и $B = E \cdot I$. Поскольку эти числа подобны, мы будем иметь:

$$\frac{C}{D} = \frac{E}{I} \quad \text{или} \quad \frac{C}{E} = \frac{D}{I}.$$

Составляем число $H = D \cdot E$.

Имеем:

$$\left.\begin{matrix} D \cdot E = H, \\ D \cdot C = A, \end{matrix}\right\} \qquad \frac{C}{E} = \frac{A}{H}; \quad \frac{D}{I} = \frac{A}{H};$$

$$\left.\begin{matrix} E \cdot D = H, \\ E \cdot I = B, \end{matrix}\right\} \qquad \frac{D}{I} = \frac{H}{B}.$$

Из этих равенств вытекает:

$$\frac{A}{H} = \frac{H}{B};$$

таким образом, между числами A и B вставлено среднее пропорциональное $H = D \cdot E$.

Отношение подобных плоскостных чисел будет:

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{H} \times \frac{H}{B} = \left(\frac{A}{H}\right)^2 = \left(\frac{C}{E}\right)^2,$$

т. е. оно равно двойному отношению соответственных сторон.

В *предложении 19* мы имеем дело с подобными телесными числами, между которыми можно вставить два средних пропорциональных числа.

Пусть $A = C \cdot D \cdot E$, $B = I \cdot H \cdot G$ — два подобных телесных числа; значит, между их сторонами имеют место соотношения

$$\frac{C}{D} = \frac{I}{H}, \qquad \frac{D}{E} = \frac{H}{G},$$

или «перестановкой»,

$$\frac{C}{I} = \frac{D}{H} = \frac{E}{G}.$$

Выделяем из A, B числа

$$C \cdot D = K, \quad I \cdot H = L.$$

Вышестоящие равенства показывают, что K и L суть подобные плоскостные числа, между которыми, согласно предыдущему предложению, существует среднее пропорциональное число

$$M = D \cdot I.$$

Поскольку M есть среднее пропорциональное между K и L, имеем:

$$\frac{K}{M} = \frac{M}{L}.$$

С другой стороны, из равенств

$$D \cdot C = K,$$
$$D \cdot I = M$$

вытекает

$$\frac{C}{I} = \frac{K}{M}.$$

Таким образом,

$$\frac{K}{M} = \frac{M}{L} = \frac{C}{I} = \frac{D}{H} = \frac{E}{G}.$$

Докажем, что два средних пропорциональных числа между A и B будут:

$$N = E \cdot M = E \cdot D \cdot I,$$
$$X = G \cdot M = G \cdot D \cdot I.$$

Действительно, мы будем иметь последовательно:

$$\left.\begin{aligned} E \cdot K &= A, \\ E \cdot M &= N, \end{aligned}\right\} \qquad \frac{K}{M} = \frac{A}{N} = \frac{C}{I} = \frac{E}{G} = \ldots;$$

$$\left.\begin{aligned} E \cdot M &= N, \\ G \cdot M &= X, \end{aligned}\right\} \qquad \frac{E}{G} = \frac{N}{X};$$

$$\left.\begin{aligned} G \cdot M &= X, \\ G \cdot L &= B, \end{aligned}\right\} \qquad \frac{M}{L} = \frac{X}{B} = \frac{C}{I} = \ldots$$

Используя вышенаписанные пропорции, будем иметь

$$\frac{A}{N} = \frac{N}{X} = \frac{X}{B}.$$

Таким образом, N и X будут действительно два средних пропорциональных числа между A и B.

Отношение A B будет:

$$\frac{A}{B} = \left(\frac{A}{N}\right)^3 = \left(\frac{E}{G}\right)^2 = \left(\frac{C}{I}\right)^2 = \left(\frac{D}{H}\right)^2.$$

Предложение 20 является обратным по отношению к 18-му: между двумя числами A и B существует среднее пропорциональное число C:

$$A:C=C:B;$$

требуется доказать, что A и B будут два подобных плоскостных числа.

Для отношений $A:C$ и $C:B$ найдём два наименьших числа D, E (предложение 33 книги VII) так, чтобы было:

$$\frac{A}{C}=\frac{C}{B}=\frac{D}{E}.$$

Если D и E наименьшие числа, то, согласно предложению 20 книги VII, они должны делить нацело соответствующие члены каждого из отношений.

Пусть

$$\frac{A}{D}=\frac{C}{E}=I, \qquad \frac{C}{D}=\frac{B}{E}=H.$$

В таком случае

$$A=D\cdot I, \quad B=E\cdot H,$$

т. е. A и B суть два плоскостных числа.

Докажем теперь, что они подобны.

Мы будем иметь последовательно:

$$\left.\begin{array}{l} I\cdot D=A, \\ I\cdot E=C, \end{array}\right\} \quad \frac{D}{E}=\frac{A}{C};$$

$$\left.\begin{array}{l} E\cdot I=C, \\ E\cdot H=B, \end{array}\right\} \quad \frac{I}{H}=\frac{C}{B}.$$

Поскольку $A:C=C:B$, то, значит,

$$\frac{D}{E}=\frac{I}{H} \text{ или } \frac{D}{I}=\frac{E}{H},$$

а это значит, что числа A и B являются подобными.

В *предложении 21* доказывается аналогичная теорема для случая двух средних пропорциональных.

Пусть для чисел A и B существуют два средних пропорциональных C и D:

$$\frac{A}{C}=\frac{C}{D}=\frac{D}{B};$$

требуется доказать, что A и B являются подобными телесными числами.

Найдём три наименьших числа $E:I:H$, находящихся в тех же отношениях $A:C:D$ и $C:D:B$ (предложение 2); согласно предложению 3 числа E и H будут первыми между собой.

Поскольку между E и H существует среднее пропорциональное число I, то, согласно только что доказанному предложению, E и H будут два подобных плоскостных числа. Положим

$$E = G \cdot K, \quad H = L \cdot M,$$
$$\frac{G}{L} = \frac{K}{M}.$$

Если I есть среднее пропорциональное между E и H, то существуют равенства

$$\frac{E}{I} = \frac{I}{H} = \frac{G}{L} = \frac{K}{M}.$$

Так как наименьшие числа в данных отношениях делят соответственные члены остальных соотношений, то мы будем иметь:

$$A:D = E:H, \qquad C:B = E:H,$$
$$\frac{A}{E} = \frac{D}{H} = N; \qquad \frac{C}{E} = \frac{B}{H} = X,$$

где N, X — два целых числа.

В таком случае

$$A = N \cdot E = N \cdot G \cdot K,$$
$$B = X \cdot H = X \cdot L \cdot M.$$

Таким образом, A и B — два телесных числа.

Докажем, что они будут подобными. Мы имеем:

$$\left.\begin{aligned} N \cdot E &= A, \\ X \cdot E &= C, \end{aligned}\right\} \quad \frac{N}{X} = \frac{A}{C}.$$

Но

$$\frac{A}{C} = \frac{E}{I}$$

(так как E, I, H — наименьшие числа, представляющие отношения $A:C:D$).

Так как

$$\frac{E}{I} = \frac{G}{L} = \frac{K}{M},$$

то

$$\frac{N}{X} = \frac{G}{K} = \frac{K}{M};$$

таким образом, $A = N \cdot G \cdot K$ и $B = X \cdot L \cdot M$ являются двумя подобными телесными числами. (*И. В.*)

8. Квадраты и кубы. Последние шесть предложений VIII книги посвящены разбору частных случаев плоскостных чисел, а именно квадратов и кубов; доказательства их настолько несложны, что не требуют никаких особенных пояснений.

Клавий [2]) пополняет Евклида следующими предложениями:

1°. Два числа, имеющих отношение квадрата к квадрату, являются подобными плоскостными.

2°. Два числа, имеющих отношение куба к кубу, являются подобными телесными.

Мы, следуя за Клавием, докажем только первое.

Пусть два числа A и B относятся друг к другу как квадрат C к квадрату D.

Вместо евклидовского чертежа Клавий пользуется табличкой

$A \cdot 8$	$B \cdot 18$
$C \cdot 16$	$D \cdot 36$

Докажем, что A и B будут подобными плоскостными числами.

Между квадратными числами C и D можно вставить одно среднее пропорциональное (предложение 11); значит, и между A и B попадёт одно среднее пропорциональное (предложение 8); следовательно, A и B будут плоскостными подобными числами (предложение 20).

---

[2]) Clavius, Opera Mathematica, Moguntiae, 1612.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ IX

1. Свойства квадратных и кубических чисел. В *предложении 1* доказывается, что произведение двух подобных плоскостных чисел будет квадратом, т. е. если $A = a \cdot b$, $B = (ka) \cdot (kb)$, то

$$G = AB = k^2a^2b^2.$$

Так как Евклид не пользуется разложением на множители, то его доказательство имеет несколько более сложный вид.

Из пропорции

$$A:B = A^2:AB \ (= D:C)$$

и предложения 18 книги VIII, что между двумя подобными числами всегда существует одно среднее пропорциональное, он выводит, что между A^2 и AB есть одно среднее пропорциональное (предложение 8 книги VIII), а так как A^2 есть квадрат, то на основании предложения 22 книги VIII и AB должно быть квадратом.

В *предложении 2* доказывается обратная теорема. Так как

$$A:B = A^2:AB \ (= D:C)$$

и AB есть квадрат, то между A^2 и AB (предложение 18 книги VIII), а значит, и между A и B (предложение 8 книги VIII), существует одно среднее пропорциональное, но тогда на основании предложения 20 книги VIII A и B будут подобными плоскостными числами.

Следующие четыре предложения относятся к кубам.

Предложение 3. Квадрат куба есть куб.

Если $A = a^3$, то и $A^2 = a^6 = (a^2)^3$ будет кубом.

Евклид доказывает теорему методом средних пропорциональных. Составив пропорцию

$$1:a = a:a^2 = a^2:a^3 \ (1:C = C:D = D:A),$$

он видит, что между 1 и $a^3 = A$ будут два средних пропорциональных. По предложению 8 книги VIII столько же их будет и между A и A^2:

$$a^3:a^4 = a^4:a^5 = a^5:a^6.$$

Если же между a^3 и a^6 будет два средних пропорциональных и $a^3 = A$ есть куб, то должно быть кубом и $A^2 = B$.

Предложение 4. Произведение двух кубов есть куб: если

$$A = a^3,\ B = b^3,$$

то

$$C = AB = (ab)^3.$$

Мы имеем, что

$$D = A^2 = a^3a^3 = (a^2)^3 \qquad \text{(предложение 3)}$$

и

$$D:C = A^2:AB = (a^2)^3:a^3b^3 = A:B.$$

Так как между двумя кубами A и B можно вставить два средних пропорциональных числа, то на основании предложения 8 книги VIII между A^2 и AB тоже попадут два средних пропорциональных; а так как A^2 есть куб, то на основании предложения 23 книги VIII будет кубом и AB.

Предложение 5 выражает теорему, обратную предыдущей: если $A = a^3$ и $AB = C$ — кубы, то и B будет кубом.

Мы имеем:

$$D:C = A^2:AB = A:B.$$

Поскольку A^2 и AB — кубы, между ними можно вставить два средних пропорциональных; значит, между A и B тоже будут два средних пропорциональных, а так как A — куб, то и B должно быть кубом.

Предложение 6 представляет теорему, обратную предложению 3: если квадрат числа есть куб, то и само число будет кубом: если $A^2 = B = a^3$, то и само A есть куб.

Мы имеем:

$$A^2 = B,\quad AB = C = A^3;$$

затем,

$$1:A = A:A^2,$$
$$1:A = A^2:A^3,$$

т. е.

$$1:A = A:A^2 = A^2:A^3.$$

Так как $A^2 = B$ и $A^3 = C$ суть кубы, то между ними будут два средних пропорциональных; на основании предложения 8 книги VIII будут два средних пропорциональных и между A и $B = A^2$; поскольку же B есть куб, то и A должно быть кубом.

Последнее можно доказать, или обобщая предложение 23 книги VIII, или при помощи предложения 21 книги VIII.

Действительно, поскольку между A и $B = A^2$ можно вставить два средних пропорциональных числа, то они на основании предложения 21 книги VIII будут подобными телесными числами; а так как B есть куб, то должно быть кубом и A. (*И. В.*)

2. Схолии Клавия. У Евклида почему-то нет теорем о квадратах, отвечающих предложениям 3, 4, выражаемым символически так:

$$a^3 \cdot a^3 = (a^2)^3;$$
$$a^3 \cdot b^3 = (ab)^3.$$

Клавий[1]) делает в своих схолиях дополнения, которые восстанавливают нарушенную этими дефектами гармонию системы «Начал».

К предложению 3:

I. *Если два квадратных числа перемножаются, то произведение — квадрат.*

II. *Если два числа, перемножаясь, производят не квадрат и одно из них квадрат, то другое не квадрат.*

III. *Квадрат и не квадрат, перемножаясь, дают не квадрат.*

Приводим доказательство только последней схолии.

«Число A квадрат, B не квадрат, произведение их C. Я утверждаю, что C не квадрат.

В самом деле, пусть C квадрат. Перемножаются A и B, и A квадрат, тогда B квадрат. А это против предположения».

К предложению 4:

I. *Куб, умножая не куб, производит не куб.*

II. *Если куб, умножая некоторое число, производит некоторое число, то число это не куб.*

3. Геометрическая прогрессия последовательных степеней. Шесть предложений 8—13 образуют единое целое и разбирают свойства непрерывной пропорции, как говорили греки (или геометрической прогрессии, как сказали бы мы), первый член которой равняется единице.

Предложение 8 устанавливает структуру рассматриваемого ряда: мы бы сказали, что он представляет ряд последовательных степеней знаменателя прогрессии, равного второму её члену; греки же, для которых конкретно представимыми были лишь квадраты и кубы, выражают то же самое, но только через термины квадратов и кубов. Если избавиться от этой терминологии, то идея доказательства Евклида выступит очень выпукло: в ряду

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ \ldots$$

будут квадратами a^2, a^4, a^6 и все остальные через одно; кубами же a^3, a^6 и все остальные через два; кубами же и квадратами вместе будут a^6, a^{12} и все остальные через пять.

В *предложении 9* доказывается, что если следующее за единицей число будет квадратом или кубом, то и все остальные будут соответственно квадратами или кубами. Доказательство основывается на свойствах непрерывной пропорции.

---

[1]) Clavius, Opera math., Moguntiae, 1612.

Действительно, если в ряду

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ \ldots$$

число a будет квадратом, а a^2, a^4, ... будут квадратами, согласно доказанному в предложении 8, то в непрерывной пропорции $a:a^2=a^2:a^3$ первый и второй члены - квадраты, а значит (предложение 22 книги VIII), и последний член a^3 тоже будет квадратом. Из пропорции $a^3:a^4=a^4:a^5$ докажем то же для a^5 и т. д.

Если теперь a будет кубом, то a^2 есть куб, как квадрат куба (предложение 3), а a^3 — по только что доказанной теореме (предложение 8). Тогда в непрерывной пропорции

$$a:a^2=a^2:a^3=a^3=a^3:a^4,$$

где a есть куб, и последний член a^4 тоже будет кубом, согласно предложению 23 книги VIII. Затем из непрерывной пропорции

$$a^2:a^3:a^4:a^5$$

докажем, что и a^5 будет кубом и точно так же все остальные.

Конечно, при нашем способе обозначения степеней оба эти результата являются очевидными.

Предложение 10 является противоположным предыдущему: если a не будет квадратом или кубом, то и никакое другое в ряду

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ a^6,\ \ldots,$$

кроме, конечно, a^2, a^4, ... или, соответственно, a^3, a^6, ...

Доказательство идёт от противного.

Если a^3 будет квадратом, то из пропорции

$$a:a^2=a^2:a^3$$

получается, что a и a^2 относятся, как два квадратных числа a^2 и a^3; поскольку же a^2 есть квадрат, то должно быть квадратом и a, что противно предположению.

Точно так же, если a^4 есть куб, то из пропорции

$$a^2:a^3=a^3:a^4$$

получается, что a^2 должно быть кубом. На основании же предложения 6 тогда и a должно быть кубом, что противно предположению.

Последние три предложения (11—13) этой группы касаются делимости членов степенного ряда.

Предложение 11 выражает, что каждый больший член степенного ряда делится на меньший, причём частное будет тоже заключаться в ряду.

Это положение — для нас очевидное — Евклид доказывает сначала для четырёх чисел A ($=1$), B, C, D, E. По свойствам непрерывной пропорции

$$A:B=D:E,$$

откуда перестановкой

$$A:D=B:E,$$

а так как $A=1$, то

$$\frac{E}{B}=D.$$

Нетрудно обобщить теорему и на большее количество чисел, что Евклид делает без доказательства в следствии. Это положение будет очевидным, если написать непрерывную пропорцию в виде

$$A:\times:\times:B:\times:C:\times:\times:D,$$

где крестиками обозначены ненужные нам члены ряда. По свойству непрерывной пропорции получаем

$$A:B=C:D,$$

после чего всё доказательство развёртывается совершенно так же, как и выше.

Это предложение играет роль вводного для двух следующих, интересных тем, что в тексте их доказательств, впервые в арифметических книгах, появляются чисто геометрические термины ὁ ὑπὸ Θ, Η*) = ⟨произведение, образуемое⟩ Θ, Η (предложение 13), ὁ ἀπὸ τοῦ Α τετράγωνον = квадрат на A (предложение 12) или просто ὁ ἀπὸ τοῦ Α.

Предложение 12 выражает, что всякое первое число E, измеряющее последнее число ряда, обязательно будет измерять и то число, которое в ряду непосредственно следует за единицей.

Идея евклидовского доказательства, выраженного несколько многословно, заключается в следующем.

Пусть дан ряд

$$1, A, A^2, A^3, A^4$$

и пусть E — некоторое первое число, измеряющее $D=A^4$. Требуется доказать, что оно будет измерять и A.

Предположим, что это не так; тогда E будет первым с A числом. Если теперь E измеряет A^4, то мы имеем:

$$D=A^4=E\cdot I;$$

*) Правильнее было бы ὁ ὑπὸ τῶν Θ, Η.

с другой стороны, согласно предложению 11,

$$A^4 = A^3 \cdot A = C \cdot A,$$
$$A^3 \cdot A = F \cdot I.$$

Равенство этих произведений равносильно пропорции

$$\frac{E}{A} = \frac{A^3}{I}.$$

Поскольку же E и A суть первые между собой, то они, согласно предложениям 20 и 21 книги VII, должны делить числа, находящиеся в одном с ним отношении; значит, E должно разделить $C = A^3$.

Повторяя с A^3 аналогичные рассуждения, докажем последовательно, что E должно разделить и A^2, а затем и A, что противоречит сделанному предположению, что A и E суть первые между собой числа. Если же A и E не будут первыми между собой, то E, поскольку оно первое число, обязательно должно разделить A, и теорема доказана.

Такое же постепенное понижение степени употребляется и в сходном доказательстве *предложения 13*, гласящего, что если в степенном ряду следующее за единицей число является первым, то последнее число может делиться только на числа рассматриваемого степенного ряда.

Доказательство опять идёт от противного. Предположим, что в ряду

$$1,\ A,\ A^2,\ A^3,\ A^4$$

последнее число A^4 делится на какое-то число E, не являющееся степенью первого числа A. Тогда число E не может быть простым (ибо по предложению 12 оно должно тогда разделить A) и не может иметь никаких первых делителей, отличных от A, ибо тогда эти первые делители должны были бы разделить A; значит, E представляет некоторую степень A. Для нас теорема по существу уже доказана, для греков же, не знавших других степеней, кроме квадрата и куба, она ещё не является в полной мере доказанной.

Если E содержит множитель, отличный от A, то частное $\frac{A^4}{E} = I$ не может быть ни одним из членов ряда A, A^2, A^3, ибо тогда по предложению 11 и E должно было быть его членом.

Из равенств

$$E \cdot I = A^4, \qquad A \cdot A^3 = A^4$$

заключаем, что

$$\frac{A}{E} = \frac{I}{A^3}.$$

Мы видим, что частное $I = \frac{A^4}{E}$ должно делить предпоследний член ряда A^3. Таким образом, от последнего члена A^4 мы перешли к предпоследнему A^3, теперь мы должны исследовать его делимость на множитель I, не принадлежащий к числу членов ряда.

Обозначив частное $\frac{A^3}{I} = H$, мы аналогично докажем, что H не входит в число членов ряда и, кроме того, должно делить A^2.

Точно так же и частное $\frac{A^2}{H} = G$ не должно входить в ряд и одновременно должно делить A, что невозможно. Значит, G будет входить в наш ряд; поскольку оно делит простое число A, то оно должно быть равно или A, или единице (последнюю возможность Евклид, естественно, не рассматривает). Но если $G = A$, то и $H = A$, затем $I = A^2$ и $E = A^3$. Если же $G = 1$, то $H = A^2$, $I = A$ и $E = A^3$. Таким образом, E во всех случаях должно входить в наш ряд. (*И. В.*)

4. Принцип полной математической индукции[2]. Некоторые математики[3, 4], например Вакка[5], видят в евклидовом доказательстве предложения 9 книги IX гораздо больше, чем в нём заключается, а именно в словах «подобным же образом докажем, что и все остальные будут квадратами».

Я не вижу здесь чего-либо более простого заключения *по аналогии*.

Сам же принцип полной математической индукции является совершенно *чуждым* духу античной мысли.

Здесь можно только сказать, что во всей общности теорема Евклида может быть доказана *строго* только с применением принципа полной математической индукции: *если положение верно для $n = 1$ и, будучи верно для n, верно и для $n + 1$, то оно верно для всех значений $n = 1, 2, 3, \ldots$*

То же самое следует сказать и о многих других предложениях арифметических книг.

Можно ещё согласиться, что таким принципом (без определённого его выявления как общего принципа) пользуется Мавролик. Так, равенство

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2a + 1) = (a + 1)^2 \qquad (1)$$

---

[2]) Enriques, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Bologna, 1925—1932.

[3]) Francisco Maurolico, Arithmeticae libri duo, 1557.

[4]) Jacob Bernoulli, Ars Conjectandi, 1713 (Opera, I, стр. 282—283).

[5]) Vacca, Sur le principe d'induction mathématique (Revue de Metaphysique, 1911, стр. 30); его же, Mauroicus the first discoverer of the principle of the mathematical induction (Bull. of the Americ. Math. Soc., XVI, стр. 70—73).

при всяком значении целого числа a им доказывается, исходя из

$$1+3+5+\ldots+(2a-1)=a^2 \qquad (2)$$

прибавлением к обеим частям $2a+1$; поскольку

$$a^2+(2a+1)=(a+1)^2,$$

то получается тождество (1).

Но манера выражаться отличается от евклидовской тем, что в конце выступает *бесконечность*:

«Так как, по предложению 3, единица со следующим нечётным даёт квадрат, т. е. 4.

А второй квадрат с третьим нечётным, 5, даёт третий квадрат, т. е. 9.

А третий квадрат, 9, с четвёртым нечётным, 7, даёт четвёртый квадрат, т. е. 16. И так постоянно до бесконечности, доказывается, повторяя предложение 13».

Как общий метод полная математическая индукция выступает только у Паскаля[6]) и Бернулли.

Следует отметить, что приравнивание принципа полной математической индукции *определению целых чисел* совершенно затушёвывает его истинное значение как *логического постулата*.

Это вовсе не свойство конечных целых чисел, а постулат, которым мы должны восполнить систему логических постулатов, чтобы быть в состоянии относительно чисел доказывать то, чего мы не можем доказать аристотелевской логикой. Обоснованность такого рода выводов, сводимая к заключению из *бесконечного ряда силлогизмов*, могла быть признана только тогда, когда математическая мысль вполне свыклась с *бесконечными операциями* и когда были установлены постулаты, определяющие получение с помощью этих операций требуемых результатов.

Это, конечно, *не математическая* аксиома, относящаяся к свойствам чисел или пространства; даже если рассматривать её как логическую аксиому, она коренным образом отличается от так называемых логических законов: тождества, противоречия и исключённого третьего.

Это положение того же рода, что *аксиома силлогизмов*, утверждающая истинность заключения при истинности посылок. Если верны посылки u и v, то будет верным и выводящееся из них заключение w; таким образом, w обладает такой же степенью достоверности, как u и v.

Отсюда вытекает положение более общего характера, которое тоже признаётся за *очевидное*. Если из $u_1, u_2, \ldots, u_n$ *конечным* числом силлогизмов выводится w, то при истинности $u_1, u_2, \ldots, u_n$ истинно также и w.

---

[6]) B. Pascal, Oeuvres, t. III, Paris, 1908.

Эта аксиома не включается в систему основных постулатов, а стоит совершенно *особняком*, санкционируя правила формальной логики, на основании которых совершаются выводы.

Античными мыслителями признавались только те выводы, которые в действительности произведены, в которых прослеживаются все посылки и заключения.

В полной математической индукции *узаконяются* выводы через *бесконечный ряд* силлогизмов.

Входящие в этот процесс силлогизмы не осуществляются в действительности, ибо нельзя произвести бесконечное число силлогизмов, но утверждается, что если u и w можно связать бесконечным рядом силлогизмов $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$, закон образования которых можно ясно уразуметь, то при истинности u следует признать и истинность w.

При этом в положении: «если u истинно и существуют силлогизмы $u_1, u_2, \ldots, u_n$, связующие u с w, то w истинно», само понятие «существовать» подвергается эволюции.

В глазах *античного* математика существование не присуще актуальной бесконечности, противоречивость которой доказывает её *небытие*.

Поэтому такая аксиома при бесконечном n не только не была бы признана очевидной, но, более того, — была бы признана совсем *не имеющей* смысла, ибо относилась бы к тому, что невозможно.

Аристотель вполне определённо говорит, что в положительных доказательствах не может быть бесконечного ряда ни при восхождении к высшему, ни при нисхождении к низшему понятию; предполагая бесконечность пути доказательств, мы отвергаем самую возможность этого доказательства.

5. Псаммит Архимеда[7]) и классификация больших чисел. Геометрическая прогрессия, исследуемая Евклидом, лежит в основе сочинения Архимеда «Псаммит» (т. е. счёт песчинок), в котором устанавливается классификация возрастающего ряда натуральных чисел.

Эта классификация оказывается нужной Архимеду при исчислении песчинок, заключающихся в сфере неподвижных звёзд.

Для нас имеет значение не этот результат, а доказательство возможности математического ответа на поставленную Архимедом задачу о счёте песчинок.

До Архимеда имелись словесные выражения для чисел первого десятка, для десятков, сотен, тысяч, десятков тысяч, при помощи которых греческие математики доходили до десятков миллионов.

---

[7]) Архимед, Псаммит, пер. Ф. Петрушевского (1824) или Г. Н. Попова (М. -Л., 1932). Montucla, Histoire des mathématiques. — A. G. Kästner, Geschichte der Mathematik, Göttingen, I, 1796 (II, 1797; III, 1799; IV, 1800).

Эти числа Архимедом называются так:

μονάδες — единицы,
δέκα μονάδες (δεκάδες) — десятки,
ἑκατὸν μονάδες (ἑκατοντάδες) — сотни,
χίλιαι μονάδες (χιλιάδες) — тысячи,
μυριάδες — десятки тысяч или мириады,
δέκα μυριάδες — десятки мириад,
ἑκατὸν μυριάδες — сотни мириад (у нас — миллионы),
χίλιαι μυριάδες — тысячи мириад ($= 10^7$).

Но Архимед поднимается выше, образуя геометрическую прогрессию (по Евклиду — непрерывную пропорцию)

$$1,\ 10^1,\ 10^2,\ 10^3,\ 10^4,\ 10^5,\ 10^6,\ 10^7,\ 10^8,\ \ldots$$

Числа $1, \ldots, 10^7$ образуют *первую октаду* и называются *первыми*.

Числа $10^8, \ldots, 10^{15}$ образуют *вторую октаду*; это вторые числа.

$10^{8\cdot 2}, \ldots, 10^{23}$ — третья октада, третьи числа; $10^{8\cdot 3}, \ldots, 10^{31}$ — четвёртая октада, четвёртые числа.

Такие октады Архимед продолжает до 10^{8^n}, где n — последнее число, равное мириаде мириад, т. е. 10^8. Все числа от 1 до $10^{8\cdot 10^8}$ он относит *к первому периоду* и строит члены *второго периода*, пользуясь опять геометрической прогрессией:

$10^{8\cdot 10^8}, 10^{8\cdot 10^8+1}, \ldots, 10^{8\cdot 10^8+7}$ — 1-я октада или первые числа 2-го периода,

$10^{8\cdot 10^8+8}, \ldots, 10^{8\cdot 10^8+15}$ — 2-я октада или вторые числа 2-го периода.

Начальные числа этих прогрессий он называет единицами соответствующего периода.

Единица 3-го периода: $10^{2\cdot 8\cdot 10^8}$;
единица 4-го периода: $10^{3\cdot 8\cdot 10^8}$;
единица 5-го периода: $10^{4\cdot 8\cdot 10^8}$ и т. д.
Вообще единица $(n+1)$-го периода: $10^{n\cdot 8\cdot 10^8}$.

Границей для n является опять 10^8 и последней единицей у Архимеда является единица (10^8+1)-го периода

$$10^{10^8\cdot 8\cdot 10^8}.$$

Здесь Архимед останавливается.

Конечный результат Архимеда состоит в том, что число песчинок, заключённых в сфере неподвижных звёзд, меньше тысячи мириад восьмых чисел, т. е. в современном обозначении 10^{63}.

6. Современная классификация больших чисел. В настоящее время при классификации чисел мы пользуемся прогрессией со знаменателем 10. Первой *гексадой* (а не октадой) являются числа $1 - 10^6$ от единицы до миллиона, второй — числа $10^6 - 10^{12}$ от миллиона до биллиона, третьей — числа $10^{12} - 10^{18}$ от биллиона до триллиона и т. д.

Таким образом, получаются числа:

$10^{3\cdot 6}$ = триллион,
$10^{4\cdot 6}$ = квадрильон,
$10^{5\cdot 6}$ = квинтильон (пентальон),
$10^{6\cdot 6}$ = секстильон (гексальон)
$10^{7\cdot 6}$ = септильон (гептальон),
$10^{8\cdot 6}$ = октальон,
$10^{9\cdot 6}$ = нонильон,
$10^{10\cdot 6}$ = децильон (декальон).

Следует заметить, что раньше классификация была только с помощью прогрессии со знаменателем 10^3, причём словесное выражение составлялось только из единиц, десятков, сотен и тысяч.

Число 86789325178, которое писалось в форме

$$86\,789\,325\,178,$$

Адам Ризэ [8]) читает так:

Восемьдесят шесть тысяч тысяч раз тысяча, семьсот восемьдесят девять тысяч раз тысяча, триста двадцать пять тысяч, сто семьдесят восемь.

Аналогичным образом читает и Штиффель [9]).

Слово *миллион* изобретено итальянцами [10]) в XIV в. для обозначения «большой тысячи», т. е. 1000^2, и встречается впервые у Шюкэ для словесного обозначения 10^{12}, 10^{18} и т. д. В печати слово миллион появляется впервые у Деларошa (1520) [11]) во Франции, в Германии же — только в конце XVII в.

В XVII в. во Франции деление производится по три цифры в каждом периоде, так что 10^9 (а не 10^{12}) оказывается биллионом, 10^{12} триллионом, 10^{15} квадрильоном, и этот принцип классификации остаётся в силе по настоящее время не только во Франции, но и в Соединённых Штатах, в то время как старый принцип употребляется в Германии, Англии и России.

7. Арифметическая и гармоническая пропорции. Никомах пополняет евклидову непрерывную пропорцию *арифметической*:

$$a - b = b - c = c - d = \ldots$$

---

[8]) A. Riese, Rechnung auf der linien und federn, Erfurt, 1522.

[9]) M. Stiffel, Arithmetica integra, Нюрнберг, 1544.

[10]) L. Pacioli, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalità, Venitiis, 1494.

[11]) De la Roche, Larismetique, Lyon, 1520, 1538.

и также *гармонической*:

$$a:b=(a-b):(b-c).$$

В пифагорейском мировоззрении, видевшем сущность вещей в числах, последней пропорции придавалось особенно много значения. Её находили в музыке: a, b, c являлись длинами струн, отвечающих тонам do, mi, sol, образующим гармонический аккорд (откуда происходит и само название).

Её старались уловить при изучении правильных (платоновых) тел, а именно отметили, что в кубе числа 12 рёбер, 8 вершин и 6 граней образуют как раз гармоническую пропорцию. Согласно Никомаху[12] Филолай вследствие этого свойства называл куб *геометрической гармонией*.

Никомах отмечает интересную теорему, связующую между собой эти три пропорции. Если взять четыре числа так, что первые два образуют с третьим арифметическую пропорцию, а с четвёртым гармоническую, т. е. образуют ряд

$$a,\ b,\ \frac{a+b}{2},\ \frac{2ab}{a+b},$$

то все четыре числа образуют геометрическую пропорцию, так как нетрудно убедиться, что

$$a\cdot b=\frac{a+b}{2}\cdot\frac{2ab}{a+b}.$$

В дальнейшем тот же Никомах пополняет три основные пропорции ещё другими, так что всего их оказывается десять:

4) $a:c=(b-c):(a-b)$ (6, 5, 3)
5) $b:c=(b-c):(a-b)$ (5, 4, 2)
6) $a:b=(b-c):(a-b)$ (6, 4, 1)
7) $a:c=(a-c):(b-c)$ (9, 8, 6)
8) $a:c=(a-c):(a-b)$ (9, 7, 6)
9) $b:c=(a-c):(b-c)$ (7, 6, 4)
10) $b:c=(a-c):(a-b)$ (8, 5, 3)

Несколько слов о *терминологии*. Греческое слово ἀναλογία (пропорция) употребляется, как правило, для обычной геометрической пропорции, а μεότης (что следовало бы перевести: посредственность) — для непрерывной (в том числе и обобщённой) пропорции.

---

[12]) Nicomachus Gerasenus, Introductionis Arithmeticae libri II, ed. Hoche, Lipsiae, 1866 (греч. текст). Англ. перевод: Nicomachus of Gerasa, Introduction to Arithmetic, transl. by M. L. D'Ooge, New-York, 1926.

Ямблих[13]) определённо говорит, что древние называли пропорцией (ἀναλογία) только *геометрическую*, позднейшие же и все остальные.

8. Обобщение прогрессии. У Евклида имеются следующие ряды чисел, возрастающих по определённым законам: целых чисел

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,$$

квадратов

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ \ldots,$$

кубов

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ \ldots$$

Затем идёт непрерывная пропорция

$$1:a = a:b = b:c = \ldots,$$

дающая геометрическую прогрессию

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ \ldots$$

В античное время к этим рядам прибавляли ещё арифметическую прогрессию

$$a,\ a+d,\ a+2d,\ a+3d,\ \ldots$$

Дальнейшим обобщением являются ряды, указываемые Карданом[14]).

К рядам *равно-возрастающим*, каковыми являлись арифметическая и геометрическая прогрессии, он прибавляет ещё *конформно-возрастающие* (conforme augens), т. е. такие, у которых для арифметической прогрессии разность, для геометрической знаменатель имеют два чередующихся значения.

Таков ряд 1, 2, 6, 12, 36, 72 в случае геометрической прогрессии, его общая форма будет:

$$a,\ aq,\ aqr,\ aq^2r,\ aq^2r^2,\ \ldots$$

В случае же арифметической прогрессии имеем:

$$a,\ a+d,\ a+d+e,\ a+2d+e,\ a+2d+2e,\ a+3d+2e,\ \ldots$$

Затем идут *равномерно-возрастающая* прогрессия (aequaliter augens) такая, в которой разности или знаменатели возрастают, как арифметическая прогрессия.

Для геометрической имеем форму

$$a,\ aq,\ aq(q+1),\ aq(q+1)(q+2),\ \ldots;$$

---

[13]) Iamblichi in Nicomachi Geraseni arithmeticam introductionem liber, ed. Pistelli, Leipzig, 1894. — Boethius, De institutione arithmetica libri II, ed. Friedlein, Leipzig, 1867.

[14]) Cardanus, De numerorum proprietatibus, гл. 26.

для арифметической форму

$$a,\ a+d,\ a+d+2d,\ a+d+2d+3d,\ \ldots$$

9. Теория простых чисел. Семь предложений 14 — 20 относятся к теории простых чисел.

Первое из них равносильно фундаментальной теореме этой теории о единственности разложения составного числа на простые множители; интересно, что Евклид доказывает его лишь для случая, когда эти простые множители входят лишь в первых степенях — настолько далека от греческого ума была идея о разложении числа на простые множители. Проще всего, пожалуй, это можно объяснить тем, что в евклидовской классификации составных чисел на плоскостные и телесные не было места для чисел состоящих более чем из трёх множителей; недаром при доказательстве предложения 14 Евклид берёт число A, равное произведению лишь трёх сомножителей B, C, D.

Предложение 15 говорит, что из трёх наименьших чисел, составляющих непрерывную пропорцию, сумма двух любых будет первой с третьим.

Если эти три числа будут наименьшими, то, согласно следствию предложения 2 книги VIII, их можно представить в виде

$$\alpha^2,\ \alpha\beta,\ \beta^2,$$

где α и β суть первые между собой числа (у Евклида DE и EI). Теорема распадается на две: нужно доказать, что $\alpha^2+\alpha\beta$ будет первым с β^2 и затем, что $\alpha^2+\beta^2$ будет первым с $\alpha\beta$.

Первая часть доказывается так: если α есть первое с β, то и $\alpha+\beta$ будет первым с β (предложение 28 книги VII), и $\alpha(\alpha+\beta)$ будет первым с β (предложение 24 книги VII), а значит, и с β^2 (предложение 25 книги VII). Но $\alpha(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta$ (предложение 3 книги II), и теорема доказана.

Вторая часть доказывается так: если $\alpha+\beta$ будет первым с α и β, то и $(\alpha+\beta)^2$ будет первым с $\alpha\beta$. Но $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta$ (предложение 4 книги II); дважды отнимая от этого равенства по $\alpha\beta$, получим, что и остаток $\alpha^2+\beta^2$ будет первым с $\alpha\beta$.

В доказательстве этой теоремы важно отметить два пункта:

1°. Ссылка на предложения 3, 4 второй книги.

2°. Употребление для вычитания термина διελοντι, который в V книге обозначает вторую производную пропорцию. Так как в дальнейшем διελοντι употребляется только для обозначения производной пропорции, то предложение 15, а также и предложение 4 второй книги принадлежат к числу сравнительно ранних; весьма вероятно, что они сложились ещё до Евдокса, материал которого Евклид использовал в своей V книге.

Предложения 16 и 17 являются леммами к двум задачам, решающимся в предложениях 18 и 19.

Первое из них читается так: если A и B — два взаимно простых числа, то не существует такого числа C, чтобы имела место пропорция

$$A:B=B:C.$$

Второе гласит: если A и D взаимно простые члены непрерывной пропорции $A:B:C:D$, то не существует числа E, удовлетворяющего пропорции

$$A:B=D:E.$$

Метод доказательства обоих предложений совершенно одинаковый; ограничимся доказательством второго предложения.

Из пропорции $A:B=D:E$ следует:

$$\frac{A}{D}=\frac{B}{E}.$$

Но A и D суть первые между собой; тогда, по предложениям 20, 21 книги VII, A должно делить B, а D делить E. Но если A делит B, то, по свойству непрерывной пропорции, оно разделит и D (отметим, между прочим, что Евклид в предложении 12 доказывает лишь положение, обратное требуемому, считая, вероятно, прямое положение очевидным), что невозможно.

Интересно, что Евклид формулирует конец доказательства несколько иначе, чем сделали бы мы: он говорит, что «A измеряет A, D, являющиеся первыми между собой; это же невозможно». Очевидно, что понятие чисел «первых между собой» было более ранним, чем понятие «первых вообще» чисел.

В *предложении 18* решается задача о нахождении третьей пропорциональной C к двум A и B, удовлетворяющей пропорции

$$A:B=B:C.$$

Задача оказывается возможной, если

$$\frac{B^2}{A}=\text{целому}.$$

Это целое и будет искомой третьей пропорциональной, как легко видеть из ряда

$$a:a\cdot\frac{b}{a}:a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Не следует смешивать третью пропорциональную со средней пропорциональной, удовлетворяющей пропорции

$$A:C=C:B,$$

откуда

$$C=\sqrt{A\cdot B}.$$

Предложение 19 представляет интерес в том отношении, что, повидимому, в его доказательстве Евклид допустил ошибку. В этом предложении ставится задача об исследовании возможности нахождения для A, B, C четвёртого пропорционального. Так как эта пропорциональная должна удовлетворять уравнению

$$A:B=C:x,$$

то, с нашей точки зрения, решение получается очень просто. Так как

$$x=\frac{B\cdot C}{A},$$

то искомое пропорциональное существует, когда $B\cdot C$ делится на A, и не существует, когда оно не делится. К этому выводу приходит и сам Евклид в последней части теоремы.

Возможно, однако, что перед умственным взором греческого математика одновременно рисовалась и другая задача: найти четвёртое пропорциональное не в простой, а в непрерывной пропорции:

$$A:B=B:C=C:x.$$

Тогда можно объяснить те четыре случая, которые он различает.

1) Если A, B, C составляют непрерывную пропорцию и A первое с C; тогда, по предложению 17, задача невозможна.
2) Если A, B, C не составляют непрерывной пропорции и A, C взаимно простые.
3) Если A, B, C составляют непрерывную пропорцию и A, C не взаимно простые.
4) Если A, B, C не составляют непрерывной пропорции и A, C не взаимно простые.

Второй случай даёт невозможное решение с точки зрения непрерывной пропорции, причём безразлично, будут ли A, C взаимно простыми или нет. Посмотрим, как идёт доказательство Евклида.

Рассуждая от противного, он допускает существование четвёртого пропорционального D по уравнению

$$A:B=C:D$$

и, кроме того, определяет некоторое целое число E по пропорции

$$B:C=D:E.$$

Тогда «по равенству» из этих пропорций получается

$$\frac{A}{C}=\frac{C}{E}.$$

Поскольку A, C первые между собой, то они, по предложениям 20, 21 книги VII, должны делить соответственно C и E, что невозможно, ибо A и C первые между собой.

Ошибка Евклида заключается в том, что он допускает существование целого числа E, удовлетворяющего пропорции

$$B:C=D:E,$$

тогда как можно показать, что такого числа не существует. Действительно, E должно удовлетворять уравнению

$$A:C=C:E,$$

при A, C же взаимно простых не может существовать такого числа E, как это видно из предложения 16.

Гейберг относит это неправильное доказательство на счёт самого Евклида. Клавий[15]) и Борелли[16]) исправляют ошибку Евклида; Коммандино[17]) и Кампанус[18]) оставляют текст Евклида без изменения.

В третьем случае, с точки зрения непрерывной пропорции, решение получается, когда

$$\frac{BC}{A}=\frac{C^2}{B}=\text{целому}.$$

Так как при $\frac{BC}{A}$, равном целому, существует четвёртое пропорциональное и в обычной пропорции, то возможно, что это обстоятельство и было причиной недоразумения самого Евклида или какого-нибудь из его переписчиков.

Во всяком случае были переписчики, от которых ошибка Евклида не ускользнула. В ватиканском манускрипте Евклида (P у Гейберга) в первой части доказательства есть вставка (после слов: «Тогда пусть не будут A, B, C последовательно пропорциональными при крайних, опять являющихся первыми между собой»): «Я утверждаю, что и так возможно; действительно, если A измеряет ⟨произведение⟩ B, C, то доказательство пойдёт подобно следующему далее. Если же A не измеряет ⟨произведения⟩ B, C, то невозможно подыскать четвёртое пропорциональное. Например, пусть A будет три какие-нибудь ⟨единицы⟩, B же шесть, C же семь. И ясно, что возможно. Если же A было бы пять, то никак невозможно. И просто, когда B есть кратное A, возможно найти четвёртое пропорциональное; если же нет, невозможно». (*И. В.*)

10. Решето Эратосфена (κόσκινον, cribrum Eratosthenis). Существенным дополнением к евклидовской теории простых чисел является так называемое *эратосфеново решето*, представляющее

---

[15]) Clavius, см. примеч. 1.

[16]) Borelli, Euclides restitutus, Pisa, 1658.

[17]) Commandino, Euclidis Elementorum libri XV, Pesaro, 1572.

[18]) Campanus-Zambertus, Euclidis Megarensis Elem. Geom., Parisiis, 1516.

собой очень простой способ выделения всех простых чисел, не превосходящих какого-нибудь наперёд заданного целого числа N.

По этому способу выписывают сначала последовательность всех натуральных чисел от 1 до N включительно:

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ \ldots,\ N. \qquad (1)$$

Заметив, что 2 есть *первое* простое число $\leqslant N$, вычёркивают из этой последовательности каждое *второе* число, начиная с $2^2=4$. Заметив, что первое, сохранившееся после 2, число 3 есть простое, вычёркивают *из той же* последовательности (1) каждое *третье* число, начиная с $3^2=9$. Заметив, что после 3 нетронутым остаётся простое число 5, вычёркивают в последовательности (1) каждое *пятое* число, начиная с $5^2=25$, и т. д., пока квадраты простых чисел не превосходят N. В результате такого «просеивания» выделяется последовательность всех простых чисел, не превосходящих N:

$$2,\ 3,\ 5,\ \ldots,\ p\leqslant N.$$

11. Простые числа линейной формы[19]. Приводим некоторые значения формы Z_p+1, где Z_p — произведение всех простых чисел до p включительно, которой пользуется Евклид:

$$\left.\begin{aligned}
1+2&=3\\
1+2\cdot3&=7\\
1+2\cdot3\cdot5&=31\\
1+2\cdot3\cdot5\cdot7&=211\\
1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11&=2\,311\\
1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13&=30\,031
\end{aligned}\right\}\ \text{простые числа}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\\
&1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\\
&1+2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19\cdot23
\end{aligned}\right\}\ \text{составные числа}$$

Следовательно, при одних значениях p возникают простые числа при других — составные. Задача о том, в каких случаях эти числа будут простыми, представляется очень трудной и до сих пор не разрешена.

Следует отметить, что та же форма Z_p+1 приводит к заключению о существовании бесконечного множества простых чисел *некоторых определённых форм*, например

$$2n+1,\ 6n+1,\ 10n+1,\ 15n+1 \text{ и т. д.}$$

Нетрудно убедиться, что число формы $4n-1$ или простое, или же делится на простое число той же формы.

В самом деле,

$$(4k+1)(4e+1)=4n+1,$$

---

[19]) E. Lucas, Theorie des nombres, Paris, 1891.

так что произведение множителей формы $4m+1$ будет всегда давать числа той же формы, а не формы $4n-1$.

Взяв вместо Z_p+1 выражение U_p-1, где

$$U_p=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\ldots(p-1)\cdot p,$$

мы, воспроизведя евклидовское рассуждение, убеждаемся в существовании бесконечного множества простых чисел формы $4n-1$.

Это положение представляет лишь частный случай замечательной теоремы, высказанной Лежандром в 1788 г., но доказанной только в 1837 г. Леженом-Дирихле: *«Всякая бесконечная арифметическая прогрессия $kx+m$, первый член m и разность k которой являются взаимно простыми числами, содержит бесконечное множество положительных простых чисел»*[20].

Вместо Z_p+1 можно взять в доказательстве Евклида

$$\Pi(p)+1 = 1\cdot 2\cdot 3\ldots p+1,$$

где $1\cdot 2\cdot 3\ldots p$ есть произведение всех целых чисел до p включительно, т. е. $p!$

Если p — простое число, то оно будет делителем числа

$$1\cdot 2\cdot 3\ldots(p-1)+1=(p-1)!+1.$$

Например, 13 будет делителем числа $479\,001\,601=12!+1$.

В этом состоит известная теорема Вильсона, с помощью которой можно установить, представляет ли p простое или составное число (ибо, если p составное, то $(p-1)!+1$ на p не делится).

12. Формы простых чисел. Предложение 20 книги IX о существовании бесконечного множества простых чисел можно представить в форме проблемы о разыскании простых чисел $p>x$, где x дано.

Операции, решающие задачу, сводятся к операциям разложения Z_x+1 на множители.

Математики старались найти *формулу*, разрешающую этот вопрос, т. е. выразить p через x:

$$p=\varphi(x),$$

где φ строится с помощью элементарных алгебраических операций и тех трансцендентных, которыми пользуется Анализ бесконечно малых. По отношению к последовательности всех простых чисел $p_1, p_2, p_3, \ldots$ следует различать задачи:

1) О разыскании простого числа p_m, большего чем данное простое число p_n, т. е.

$$p_m=\varphi(p_n), \quad \text{где } m>n.$$

---

[20]) P. G. Lejeune-Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, Braunschweig, 1894. — П. Г. Лежен-Дирихле, Лекции по теории чисел, пер. под ред. Б. И. Сегал, М. — Л., 1936.

2) О разыскании простого числа p_{n+1}, непосредственно следующего за данным простым числом p_n:

$$p_{n+1} = \varphi(p_n).$$

3) О разыскании простых чисел данного порядка:

$$p_n = \varphi(n).$$

К этим проблемам следует ещё прибавить следующие:

4) О разыскании $\varphi(x)$ такой, что при всяком целом x $\varphi(x)$ представляла бы простое число.

5) О разыскании такой $\varphi(x)$, что $\varphi(x)$ даёт бесконечное множество простых чисел.

6) О разыскании $\varphi(x)$, дающей *точное* число простых чисел, меньших x.

Последняя из этих проблем эволюционирует в другую, хотя и тоже трудную, но для которой большие усилия математиков дали решение: о разыскании асимптотического выражения $\omega(x)$ для $\varphi(x)$, т. е. такого, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\omega(x)}{\varphi(x)} = 1.$$

Задачи 4, 5, вероятно, являются *неразрешимыми*. Первая потому, что такой функции *не существует*, вторая потому, что хотя, как следует думать, *все алгебраически неразрешимые формы и содержат бесконечное множество простых чисел*, но для доказательства этого (в смысле убеждения в его справедливости) у нас недостаточно основных *очевидных* положений.

Эйлер[21]) приводит полиномы с целыми коэффициентами

$$x^2 + x + 17, \quad 2x^2 + 29, \quad x^2 - x + 41,$$

дающие простые числа при следующих друг за другом значениях x. Но это является *случайностью*. Нетрудно видеть, что полиномы с целыми коэффициентами не могут давать только простые числа.

Так, если $f(x_0) = p$, то

$$f(x_0 + py) = f(x_0) + pyf'(x) + \ldots$$

должно уже делиться на p.

Ферма думал, что все числа формы

$$2^{2^n} + 1$$

простые. Это верно для $n = 0, 1, 2, 3, 4$, но уже оказывается неверным для $n = 5, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$.

---

[21]) Euler, Nouv. Mém. Ac. Berlin, 1772.

Естественно думать, что то же следует сказать и о тех формах, под которые различными математиками подводились простые числа.

Линейная форма $ax+b$ при a и b взаимно простых содержит бесконечное множество простых чисел. Это доказал Лежен-Дирихле (см. комментарий 11). Но других таких доказательств мы не имеем.

Эйзенштейн полагал, что то же следует сказать и о форме $2^{2^n}+1$. Люка думает, что Эйзенштейн имел доказательство этого положения. Но сомнительно, чтобы такое доказательство возможно было найти для n^n+1.

13. Число простых чисел, не превосходящих данного числа x. Обозначим через $\pi(x)$ число простых чисел, не превосходящих какого-нибудь положительного числа x.

Уже Эйлеру (1707—1783) было известно, что $\frac{\pi(n)}{n}\to 0$ при $n\to\infty$. Это соотношение свидетельствовало о том, что количество простых чисел бесконечно мало по сравнению со множеством всех натуральных чисел, но не давало возможности хотя бы приближённо выразить арифметическую функцию $\pi(n)$ в зависимости от n.

Первую асимптотическую формулу для определения $\pi(x)$ при больших x дал Лежандр в 1808 г. во втором томе своей Теории чисел [22]):

$$\pi(x)\approx\frac{x}{\ln x-1{,}08366}.$$

Эту формулу он проверил на таблице простых чисел от 10 000 до 1 000 000.

Гаусс (1777—1855) в письме к Энке от 1849 г. (опубликованном в 1863 г.) указал [23]) асимптотическую формулу

$$\pi(x)\sim \mathrm{Li}(x),\quad \text{где } \mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{du}{\ln u}.$$

Сопоставляя значения $\pi(x)$ и $\mathrm{Li}(x)$ до $x=3\,000\,000$, Гаусс и Гольдшмидт установили, что, уже начиная с первой сотни тысяч, это число остаётся меньше $\mathrm{Li}(x)$, причём разность, много раз колеблясь, постепенно растёт вместе с x (см. Б. Риман, Сочинения, М. — Л., 1948, стр. 224).

Следует заметить, что хотя ни Гаусс, ни Лежандр не формулировали вполне строго требований к точности своих эмпири-

---

[22]) A. M. Legendre, Essai sur la théorie des nombres, II, Paris, 1808.

[23]) Gauss, Werke, Bd. II (Höhere Arithmetik), Göttingen, 1863.

ческих формул за пределами таблицы, они, видимо, стремились «достичь „асимптотической эквивалентности" $\pi(x)$ и аппроксимирующей функции $f(x)$, т. е. чтобы при безграничном увеличении x отношение $\frac{\pi(x)}{f(x)}$ стремилось к единице» (А. Е. Ингам, Распределение простых чисел, пер. с англ. Д. А. Райкова, М. — Л., 1936, стр. 9).

В решении вопроса о распределении простых чисел огромное значение имели работы[24] П. Л. Чебышева (1821—1894). По мнению Э. Ландау — одного из крупнейших современных специалистов по теории чисел, — Чебышев первый после Евклида существенно продвинул вперёд решение этой проблемы.

В своей первой работе, посвящённой этому вопросу, «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины», опубликованной в 1848 г., Чебышев установил связь между значениями функции $\pi(x)$ и поведением функции $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^z}$ вблизи особой точки $z=1$ при действительных значениях z. «Эта связь, — указывает А. О. Гельфонд в комментариях к рассматриваемой работе, — позволила ему открыть фундаментальный для распределения простых чисел факт колебания $\pi(x)$ около $\mathrm{Li}(x)=\int_2^x\frac{dx}{\ln x}$», хотя этот факт «не мог быть дан Чебышевым в его современной точной формулировке, именно, что разность $\pi(x)-\mathrm{Li}(x)$ бесчисленное число раз меняет знак (Литтльвуд, 1914) и что

$$\pi(x)-\mathrm{Li}(x)=xe^{-t(x)\ln\ln x},\ t(x)\longrightarrow\infty$$

(Адамар, Валле-Пуссен)».

В другой своей работе — «О простых числах», опубликованной в 1850 г., Чебышев впервые нашёл границы колебания $\pi(x)$ около $\frac{x}{\ln x}$, т. е. установил, что существуют положительные константы a и b, удовлетворяющие условию

$$a\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<b\frac{x}{\ln x}\quad\text{при } x\geqslant 2,$$

---

[24]) П. Л. Чебышев, Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée (Mémoires des savants étrangers de l'Acad. Imp. Sci. de St.-Pétersbourg, VI [1848], стр. 1—19); Mémoire sur nombres premiers (там же, VII [1850], стр. 17—33). См. Полн. собр. соч. П. Л. Чебышева, т. I, изд. АН СССР, 1944, стр. 173 и 191.

что, в свою очередь, позволило ему доказать так называемый постулат Бертрана: между x и $2x$ находится по крайней мере одно простое число.

Чебышев доказал предыдущее неравенство для $a = 0{,}92129\ldots$ и $b = \frac{6}{5}a = 1{,}105\ldots$ Уточняя результаты Чебышева, Сильвестр установил, что при достаточно больших x выполняется неравенство

$$0{,}95\,\frac{x}{\ln x} < \pi(x) < 1{,}05\,\frac{x}{\ln x}$$

и что если x больше известного предела, то между x и $1{,}092\,x$ имеется простое число.

П. Л. Чебышев доказал (1850), что если существует предел отношения

$$\pi(x) : \frac{x}{\ln x} \quad \text{или} \quad \pi(x) : \int_2^x \frac{du}{\ln u}$$

при $x \to \infty$, то он может быть равен только 1. Опираясь на новые идеи Римана, высказанные им в 1859 г. в мемуаре «О числе простых чисел, не превышающих данной величины»[25], Адамар[26] и Валле-Пуссен[27] одновременно и независимо друг от друга установили в 1896 г. существование и равенство единице вышеупомянутого предела, в результате чего был окончательно утверждён так называемый *асимптотический закон простых чисел*:

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\pi(x) : \int_2^x \frac{du}{\ln u}\right\} = \lim_{x\to\infty}\left\{\pi(x) : \frac{x}{\ln x}\right\} = 1.$$

Дальнейшие исследования были посвящены, главным образом, наиболее точной оценке разности $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$ и развивались в

---

[25]) B. Riemann, Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegeben Grösse (Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859). См. русский пер. в книге: Б. Риман, Сочинения, Гостехиздат. 1948, стр. 216—224.

[26]) J. Hadamard, Etude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (Journal de math., t. 9, ser. 4, 1893, 171—215); Sur la distribution des zéros de la fonction $\zeta(s)$ et ses conséquences arithmétiques (Bull. de la Soc. math. de France, 24, 1896, 199—220).

[27]) C. J. de la Vallée-Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres; Première partie: La fonction $\zeta(s)$ de Riemann et les nombres premiers en général (Ann. de la Soc. scientif. de Bruxelles, 20_2, 1896, 183—256).

плане идей Римана, связанных со свойствами дзета-функции $\zeta(z)$ комплексного переменного z. Однако, по мнению А. О. Гельфонда, «в настоящее время есть уже достаточные основания вернуться к идеям Чебышева и с этой стороны попытаться подойти к закону распределения простых чисел; другими словами, хотя бы найти удовлетворительную оценку для разности $\pi(x) - \mathrm{Li}(x)$» *).

14. Доказательство Эйлера и Гакса для теоремы 20 книги IX. Совершенно на других принципах основано доказательство Эйлера [28]) существования бесконечного множества простых чисел.

При $p > 1$ мы имеем разложение

$$\left(1-\frac{1}{p}\right)^{-1} = 1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\ldots,$$

где полагаем p равным простым числам: 2, 3, 5, 7, ...

Перемножая такие разложения, мы получаем справа сумму различных членов вида $\frac{1}{2^\alpha 3^\beta 5^\gamma \ldots}$ с положительными или равными нулю показателями $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, так что

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7}}\ldots = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots;$$

Сумма *гармонического* ряда в правой части бесконечна. Но левая часть может обладать бесконечным значением только в том случае, если число множителей, а значит, и простых чисел — бесконечное множество.

Существует ещё другое доказательство.

Гакс [29]) берёт неприводимую дробь $\frac{r}{s} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p}$, где 2, 3, ..., p простые числа, и указывает, что, с одной стороны числитель, очевидно, не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, ..., p и поэтому он или простое число, или делится на простое число большее p.

Бесконечность множества простых чисел выводится также из формулы Эйлера [30])

$$\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^2}} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2}.$$

---

*) Комментарий 13 принадлежит В. А. Солодкову. (*Прим. ред.*)

[28]) L. Euler, Introductio in Analysin infinitorum, 1, Лозанна, 1748 (русский пер. под ред. С. Я. Лурье, М., 1936), гл. XI.

[29]) J. Hacks, Act. math. 14, 1890—1891, стр. 329—336.

[30]) L. Euler, Introductio, I, гл. XV (см. примеч. 28).

где произведение в левой части распространяется на все простые числа, а сумма в правой — на все натуральные числа. Но правая часть сводится к $\frac{\pi^2}{6}$, и π^2 оказывается рациональным числом в том случае, если множество простых чисел ограничено.

15. Теория чётных и нечётных чисел. Последние 16 предложений IX книги представляют законченное целое, мало связанное с предшествующим материалом. Эти предложения, если исключить два последних (35 и 36), поражают своей элементарностью и, с нашей точки зрения, вряд ли заслуживают специального выделения в самый конец арифметических книг Евклида, которые они как будто венчают.

Немецкий исследователь Беккер в статье «Lehre vom Geraden und Ungeraden im IX Buche der Euklidischen Elemente» в 3-м томе «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik und Physik» (abt. B. Studien III, стр. 536—599) показал, что эта часть IX книги может быть рассматриваема как остаток очень древней греческой математической науки.

Эти предложения опираются на определение чётных и нечётных чисел в начале VII книги (определения 6—10), к которым нужно присоединить последнее определение 23 совершенных чисел; теория совершенных чисел является истинным завершением всех этих предложений конца IX книги.

Аргументация Беккера основывается на следующем.

Во-первых, различение чётных и нечётных чисел, а также разных подразделений чётных очень характерно для пифагорейских учений, в которых противоположность между единицей и двойкой, чётом и нечётом принадлежала к числу основных.

Во-вторых, доказательство в этой части ведётся на точках («счётных камешках»), представляющих различные числа *); число есть совокупность монад-точек; такое представление числа тоже восходит к пифагорейцам.

Два последних предложения (35 и 36) относятся к учению о совершенных числах, причём предложение 35 представляет лемму, необходимую для доказательства последнего предложения 36. В доказательствах этих теорем, равно как и в доказательстве предложения 32, используется материал, содержащийся в более ранних арифметических книгах, но Беккер показал, что эти доказательства могут быть заменены более простыми, опирающимися только на предложения 21—34.

---

*) В гейберговском издании этот момент не отражён; числа в этом разделе, равно как и во всех чертежах предшествующих предложений, изображаются линиями, что по существу характерно лишь для послеэвдоксовского периода развития греческой математики, когда число из собрания дискретных единиц превратилось в меру непрерывных *величин*, простейшей из которых является длина прямой линии.

Начнём с предложения 32: «Из чисел, получаемых удвоением от двойки, каждое будет только чётно-чётным».

При доказательстве этой теоремы у Евклида применяется предложение 13 книги IX, формулирующееся так: «Если будет от единицы сколько угодно последовательно пропорциональных чисел, то же число, что за единицей, будет первое, то наибольшее число не будет измеряться никаким другим, кроме находящихся среди пропорциональных чисел».

Можно обойтись без привлечения этой теоремы, используя, например, предыдущее предложение 31: «Если нечётное число по отношению к некоторому числу будет первым, то оно будет первым и по отношению к его удвоенному». Действительно, любое нечётное число будет первым с двойкой, значит, будет первым и с удвоенной двойкой, и с учетверённой и т. д., что и доказывает нашу теорему; при этом не нужно выходить из того круга предложений, который начинается с предложения 21 книги IX.

Так как предложение 35 является леммой для доказательства 36, то мы можем его опустить и прямо перейдём к беккеровской реконструкции первоначального доказательства предложения 36.

Образован ряд чисел $1, 2, 4, \ldots, 2^n$, обладающих тем свойством, что сумма

$$1+2+4+\ldots+2^n=p,$$

где p есть некоторое первое число; доказать, что число $2^n \cdot p$ является совершенным, т. е. равным сумме всех своих делителей.

Делителями числа $2^n \cdot p$ будут, очевидно, следующие:

$$1,\ 2,\ 2^2, \ldots, 2^{n-1},\ 2^n,$$
$$p,\ 2p,\ 2^2p, \ldots, 2^{n-1} \cdot p.$$

Докажем, что другие делители у числа $2^n \cdot p$ невозможны.

Действительно, всякий делитель будет или чётным, или нечётным числом. Но всякое нечётное число, отличное от p, не делит простого числа p, а согласно предложению 31 не будет делить и $2p$, $4p$, ... и, наконец, $2^n \cdot p$.

Далее, если в качестве делителя мы возьмём чётно-нечётное число вида $2(2k+1)$, то, согласно замечанию, сделанному при доказательстве предложения 33, его половина разделит половину делимого, т. е. число $2k+1$ будет делителем $2^{n-1}p$, что, по предыдущему, невозможно.

Если в качестве делителя мы возьмём число, могущее быть представленным и как чётно-чётное, и как чётно-нечётное, т. е. число вида $2^m(2k+1)$, где m меньше n, то, разделив делимое и делитель m раз на 2, придём к выводу, что $2^{n-m} \cdot p$ должно делиться на $2k+1$, что невозможно.

Наконец, если делителем было бы какое-нибудь число, могущее быть представленным только как чётно-чётное, т. е. число вида 2^m, то легко докажем, что m не может быть больше n, ибо

в противном случае оказалось бы, что нечётное число p должно было бы делиться на чётное число 2^{m-n}.

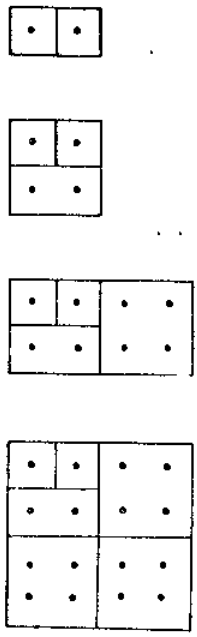
Теперь остаётся лишь доказать, что

$$1+2+4+\ldots+2^n+p+2p+\ldots+2^{n-1}p=2^n\cdot p.$$

Но сумма $1+2+4+\ldots+2^n$ уже равняется p. Сокращая обе части на p, приходим к необходимости доказательства равенства

$$1+(1+2+4+\ldots+2^{n-1})=2^n.$$

Это доказательство «на камешках» легко производится так (черт. 1).



$1+1=2$

$1+1+2=4$

$1+1+2+4=8$

$1+1+2+4+8=16$

и т. д.

Черт. 1.

Доказательство, очевидно, опирается на то, что

$$2+2=2\cdot 2,$$

и, следовательно,

$$2^{n-1}+2^{n-1}=2^n,$$

и, таким образом, не требует предварительного знания формулы суммы геометрической прогрессии.

Наличие последовательных удвоений Беккер сопоставляет со специально египетским способом умножения при помощи удвоения и видит в этом признак египетского происхождения учения о совершенных числах.

Можно дать и более существенные доказательства в пользу египетского происхождения этой теории.

Прежде всего, неоспорим тот факт, что египтяне употребляли два совершенных числа 6 и 28. Если употребление числа 6, как кратного 2 и 3, может быть объяснено и другими причинами, то факт разделения египетского локтя на 28 пальцев вряд ли можно объяснить чем-либо другим, как не тем, что египтяне, создавая масштабную линейку, хотели, чтобы длина основной единицы равнялась сумме всех кратных её подразделений.

Наконец, немецкий учёный Гульч указал ещё следующие доводы в пользу египетского происхождения понятия о совершенном числе *).

Основным является евклидовское определение совершенного числа как «равного сумме всех своих частей». Эта формулировка, кажущаяся нам немного тривиальной, сейчас же уяснится, если мы прочтём у Евклида определение части (определение 3 книги VII): часть есть число, укладывающееся целое число раз в большем; таким образом, евклидовская «часть» есть дробь $\frac{1}{n}$. Это, конечно, сразу же заставляет вспомнить о египетском понятии дроби: только при таком ограниченном понимании дроби-части уничтожается тривиальность евклидовского определения совершенного числа.

Понятие о совершенном числе возникло в связи с попытками представить единицу в виде суммы дробей с числителями, равными единице:

$$1 = \frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \dots,$$

что было необходимо египтянам для производства вычитания.

Выполняя действие над дробями, египтяне заменяли их пропорциональными целыми числами (исчисление «секем»), что в некоторой степени соответствует нашему приведению к общему знаменателю. Пусть этот знаменатель будет N; умножив на него обе части нашего равенства и положив

$$\frac{N}{n_1} = n'_1, \quad \frac{N}{n_2} = n'_2, \quad \frac{N}{n_3} = n'_3, \dots,$$

мы приходим к равенству

$$N = n'_1 + n'_2 + n'_3 + \dots,$$

*) Работа Гульча мне известна лишь по краткому упоминанию у Таннери в «Mémoires scientifiques», т. X, стр. 33—35; однако ход мыслей Гульча может быть вполне восстановлен.

т. е. число N должно быть равно сумме своих делителей. Если мы теперь потребуем, чтобы оно равнялось сумме *всех* своих делителей, то и придём к понятию совершенного числа.

Мы разобрали историю совершенных чисел до Евклида; теперь нам остаётся посмотреть, что́ сделал с ними сам Евклид. Ему принадлежат два последних предложения: 35 и 36. Первое из них, служащее у Евклида леммой для доказательства предложения 36, имеет громадное значение и само по себе: оно впервые в истории математической науки даёт формулу для определения суммы геометрической прогрессии.

Идея евклидовского доказательства предложения 35 заключается в следующем.

Возьмём ряд чисел A, BC, D, EI, составляющих геометрическую прогрессию

$$a,\ aq,\ aq^2,\ aq^3.$$

и вычтем по $A = a$ из второго и последнего чисел; получится

$$HC = aq - a,\ EG = aq^3 - a.$$

Задача сводится к тому, чтобы доказать равенство

$$\frac{aq - a}{a} = \frac{aq^3 - a}{a + aq + aq^2}.$$

При нашем способе обозначения доказательство этого равенства сводится к простому выполнению алгебраического деления

$$q - 1 = \frac{q^3 - 1}{1 + q + q^2};$$

Евклид же должен был прибегнуть к составлению производной пропорции с вычитанием:

$$\frac{aq}{a} = \frac{aq^2}{aq} = \frac{aq^3}{aq^2} \quad \left(\frac{IK}{IG} = \frac{LI}{IK} = \frac{EI}{IL}\right);$$

$$\frac{aq - a}{a} = \frac{aq^2 - aq}{aq} = \frac{aq^3 - aq^2}{aq^2} \quad \left(\frac{KG}{IG} = \frac{LK}{IK} = \frac{EL}{IL}\right).$$

Если теперь мы напишем, что сумма предыдущих относится к сумме последующих, как один из предыдущих относится к одному из последующих, то и получим нужную нам теорему

$$\frac{KG}{IG} = \frac{EG}{IK + IL + IG},$$

$$\frac{aq - a}{a} = \frac{aq^3 - a}{a + aq + aq^2}.$$

Из неё легко получается формула суммы геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 = \frac{aq^3 - a}{q - 1}.$$

После этого доказательство предложения 36 приобретает такой вид.

Пусть $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = p$, где p — первое число, требуется доказать, что $p \cdot 2^{n-1}$ есть совершенное число.

Составляем два ряда:

$$2,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots,\ 2^{n-1};$$

$$p,\ 2p,\ 2^2p,\ \ldots,\ 2^{n-2}p.$$

По равенству (предложение 14 книги VII) будем иметь:

$$2 : 2^{n-1} = p : 2^{n-2}p,$$

что на основании предложения 19 книги VII даёт:

$$p \cdot 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-2}p.$$

Для нас это равенство является очевидным; для Евклида же, при его способе обозначения, оно подлежало доказательству.

Теперь Евклид переходит к суммированию ряда

$$p + 2p + 4p + \ldots + 2^{n-2}p.$$

Приписав к нему ещё один член $2^{n-1}p$, он на основании предложения 35 получает:

$$\frac{2p - p}{p} = \frac{2^{n-1}p - p}{p + 2p + \ldots + 2^{n-2}p},$$

откуда, поскольку отношение в левой части равняется единице, вытекает:

$$p + 2p + \ldots + 2^{n-2}p = 2^{n-1}p - p$$

и, значит,

$$2^{n-1}p = p + p + 2p + \ldots + 2^{n-2}p$$

или, поскольку $p = 1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{n-1}$,

$$2^{n-1}p = p + 2p + \ldots + 2^{n-2}p + (1 + 2 + \ldots + 2^{n-1}).$$

Таким образом, число $2^{n-1}p$ делится на все числа, стоящие в правой части, и равно сумме всех этих делителей.

Для доказательства, что $2^{n-1}p$ есть совершенное число, нам остаётся только доказать, что оно не может иметь никаких других делителей. Это доказательство Евклид ведёт от противного.

Пусть $2^{n-1}p$ делится на некоторое число x, отличное от чисел, стоящих в правой части нашего равенства. Тогда мы должны будем иметь:

$$2^{n-1}p = x \cdot m,$$

откуда

$$\frac{p}{m} = \frac{x}{2^{n-1}}.$$

Но x не может измерять 2^{n-1}, значит, и p не будет измерять m, значит, оно будет с ним первым. Отсюда следует, что 2^{n-1} должно измеряться m, т. е. m должно представлять некоторую степень двух. Пусть $m = 2^r$, в таком случае

$$\frac{2^r}{2^{n-1}} = \frac{p}{2^{n-r-1}p},$$

откуда

$$2^r \cdot 2^{n-r-1}p = 2^{n-1} \cdot p = x \cdot m.$$

Если $m = 2^r$, то $x = 2^{n-r-1}p$, что противоречит нашему предположению. Таким образом, всякий делитель $2^{n-1}p$ должен заключаться в ряду чисел, стоящих в правой части равенства:

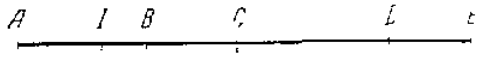
$$2^{n-1}p = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} + p + 2p + \ldots + 2^{n-2}p,$$

т. е. $2^{n-1}p$ есть совершенное число. (*И. В.*)

16. Иное доказательство предложения 22. В приложении к Гейберговскому изданию Евклида помещено второе доказательство предложения 22 (черт. 2):

«Иначе.

Или и так; поскольку теперь AB нечётное, то отнимем от него единицу IB; значит, остаток AI будет чётным.



Черт. 2.

Опять, поскольку BC нечётно и IB является единицей, то значит, IC чётное. Также и AI чётное. Значит, и всё AC будет чётным (предложение 21 книги IX). Вот на том же основании и CE будет чётным. Так что и всё AE будет чётным (предложение 21 книги IX)».

17. Совершенные числа[31]. Евклид для совершенного числа, т. е. числа, равного сумме всех своих делителей (отличных от него самого), даёт в предложении 36 книги IX формулу

$$N = 2^{p-1}b,$$

[31]) См. примеч. 19. — Tropfke, Gesch. der Elementar-Math., Bd. I, 3. Aufl., Berl. und Leipz., 1930, стр. 138—139 (C, II).

где b представляет сумму $1+2+2^2+\ldots+2^{p-1}$, которая выражается через 2^p-1, так что N (совершенное число) $=2^{p-1}\times\times(2^p-1)$; при этом предполагается, что не только p, но и 2^p-1 простое число.

Но из его рассуждения вовсе не следует, что *всякое совершенное* число будет такой формы. В настоящее время доказано, что *всякое чётное совершенное число должно быть евклидовской формы*, но до сих пор не найдено ни одного *нечётного* совершенного числа.

Древние знали только следующие совершенные числа:

$$1)\ 2\ (2^2-1)=6,$$
$$2)\ 2^2(2^3-1)=28,$$
$$3)\ 2^4(2^5-1)=496,$$
$$4)\ 2^6(2^7-1)=8128,$$

о которых упоминают Никомах и Боэций. Пятое совершенное число

$$5)\ 2^{12}(2^{13}-1)=33\,550\,336$$

указывается Региомонтаном (1436—1476). Штиффель его не знает, но выставляет

$$2^8(2^9-1)=256\cdot511=130\,816$$

как совершенное число, упуская из виду, что 511 не простое.

В «Началах Евклида» Шейбеля (I. Scheybl) 1555 г. находим шестое и седьмое совершенные числа:

$$6)\ 2^{16}(2^{17}-1)=8\,589\,869\,056,$$
$$7)\ 2^{18}(2^{19}-1)=137\,438\,691\,328.$$

Восьмое

$$8)\ 2^{30}(2^{31}-1)=2\,305\,843\,008\,139\,952\,128$$

принадлежит Мерсенну (1644).

Только в конце XIX в. было найдено Зеельгофом (Seelhoff) (1885) девятое совершенное число

$$9)\ 2^{60}(2^{61}-1)$$

с 37 цифрами.

В 1912 г. американец Powers нашёл десятое совершенное число

$$10)\ 2^{88}(2^{89}-1).$$

В 1914 г. Powers и Fauquembergue нашли одиннадцатое число

$$11)\ 2^{106}(2^{107}-1).$$

Fauquembergue доказал также, что будет совершенным число

$$12)\ 2^{126}(2^{127}-1);$$

последнее с 77 цифрами.

18. Исследование простых чисел вида $2^p - 1$[32]). Когда форма $2^p - 1$, входящая в евклидову форму, даёт простое число, то $2^{p-1}(2^p - 1)$ является совершенным.

Для того чтобы $2^p - 1$ было простым, конечно, необходимо, чтобы p было *простым*.

В самом деле, в противном случае, если $p = \alpha\beta$, то $2^p - 1 = 2^{\alpha\beta} - 1$ будет делиться на $2^\alpha - 1$ и $2^\beta - 1$.

Но условие это вовсе не достаточно. Мы имеем, например,

$$2^{11} - 1 = 23 \cdot 89.$$

Мы приводим таблицу, содержащую *составные* числа формы $2^p - 1$ до $p = 251$, которым поэтому уже не будут отвечать совершенные числа.

p	d	p	d	p	d
11	23	59	17 995	179	359
23	47	73	439	191	383
29	233	79	2 687	211	15 193
37	223	83	167	223	18 287
41	13 367	97	11 447	233	1 399
43	431	113	3 391	239	479
47	2 351	131	263	251	503
53	6 361	151	18 121		

Для чисел 11, 23, 29, 37 это было обнаружено Ферма, для 41 — Плана, для 43, 47, 43, 59 — Ляндри, для остальных — Деляссаром.

19. Дружественные числа[33]). Проблемой, аналогично разрешаемой, является проблема о дружественных числах, т. е. таких, для которых сумма делителей одного равна другому, и обратно:

$$\sigma(p) = q, \quad \sigma(q) = p.$$

Ямблих приписывает открытие дружественных чисел Пифагору.

---

[32]) Lucas (см. примеч. 19). П. Л. Чебышев, **Теория сравнений**, СПБ, 1849.

[33]) Tropfke, I, стр. 139 (см. примеч. 31).

Ему были известны дружественные числа:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142,$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Арабский математик Табит Ибн-Корра[34] (836—901) даёт форму для дружественных чисел, аналогичную той, какую даёт Евклид для совершенных, а именно:

$$A = 2^n p \cdot q, \qquad B = 2^n r,$$

где

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \; q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \; r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1.$$

Ферма в письме к Мерсенну указывает дружественные числа 17 296 и 18 416, Декарт — 9 363 584 и 9 437 056.

---

[34]) Woepke, Notice sur une théorie ajoutée par Thâbit ben Korrah à l'arithmétique spéculative des Grecs, Journ. As. 20_4, Paris, 1852, стр. 423.

КОММЕНТАРИИ К КНИГЕ X

1. Постулаты Клавия. Клавий [1]) отмечает, что Евклид неявно пользуется некоторыми очевидными положениями, которые Клавий выдвигает как *постулаты* и *аксиомы*. Их можно найти и в других комментариях, например Родия [2]).

К постулатам он относит только архимедову аксиому в следующей форме:

Требуется, чтобы возможно было умножением какой-либо величины сделать, чтобы она превзошла любую величину того же рода.

Аксиомами же выставляются следующие предложения:

I. Величина, измеряющая несколько величин, измеряет также их сумму.

II. Величина, измеряющая какую-либо величину, измеряет также и ту, которую последняя измеряет.

III. Величина, измеряющая целую величину и отнимаемую, измеряет также и остаток.

Эти аксиомы не следует отождествлять с теми, которые выставляются в начале арифметических книг, так как не только для Евклида, но и для Клавия не всякая геометрическая величина выражается числом.

2. К истории терминологии [3]). Термины ῥητοί, ἄῤῥητοι — дословно «выразимые и не выразимые» идут ещё от пифагорейцев; σύμμετροι и οὐ σύμμετροι или ἀσύμμετροι вводятся Феодором Киренским, учителем Платона. Теэтет, вводя наряду с простыми *одночленными* ещё *двучленные*, различает уже ῥητοὶ μήκει и ῥητοὶ δυνάμει, т. е. рациональные в длине и в степени, а также термин ἄλογοι — иррациональные.

---

[1]) Clavius, Opera mathematica, Moguntiae, 1612. Comment. in Euclidis Elementa Geom. lib. X.

[2]) Rodius, Euclidis Elementorum libri. XIII, Vittenbergiae, 1634.

[3]) Tropfke, Gesch. der Elementar-Mathematik, Bd. II, 3. Aufl., Berl. und Leipz., 1933, стр. 94—95 (C, 5).

Марциан Капелла (470 г. н. э.) переводит ἄλογος латинским словом irrationalis, а Кассиодор σύμμετρος и ἀσύμμετρος через rationalis и irrationalis. Термин commensurabilis, вполне отвечающий нашему термину соизмеримый, вводится Боэцием (480—524).

Герхард Кремонский (1114—1187), вместо irrationalis чаще употребляет термин, заимствованный у арабов: surdus (глухой или немой).

Леонардо Пизанский пользуется терминами rationalis, irrationalis и surdus.

Брадвардин (около 1290—1349) берёт asimmetrus вместо incommensurabilis.

Термины surdus, irrationalis встречаются и у позднейших авторов: у Рудольфа и Штиффеля.

3. Определение соизмеримости и рациональности. Следует хорошо вдуматься в определения Евклида. Прежде всего, следует обратить внимание на то, что они относятся к *геометрическим величинам вообще, а не к числам.*

В отношении *площадей* первое определение не требует комментария. Площади, например прямоугольников, соизмеримы, если у них существует *общая мера*, и несоизмеримы, если этой общей меры нет.

Но относительно *прямой* первое определение в евклидовской формулировке может быть неправильно понято. *В евклидовском* понимании прямые могут быть соизмеримыми и тогда, когда у них общей меры нет. Если прямую, как площадь, подвести под общее понятие величины, то под определение I подойдёт только один вид соизмеримости, т. е. линейная соизмеримость или соизмеримость *по длине*. Но Евклид ещё устанавливает понятие соизмеримости *в степени*, т. е. *прямые a* и *b* он называет соизмеримыми в степени тогда, когда соизмеримыми являются связанные с ними площади квадратов, или — как выражается Евклид — квадраты на *a* и *b*.

Определение *рациональности прямых* может тоже породить недоразумение.

Прежде всего, это понятие *не абсолютное*, как наше понятие *рациональных чисел*, а только *относительное*. Третье определение следовало бы формулировать так: приняв за основную прямую *a*, мы будем называть и самое *a* и все прямые *b*, *c*, *d*, с ней соизмеримые, рациональными, а несоизмеримые — иррациональными.

Если признать, как это делает Лежандр,[4]) а за ним и мы, взаимно однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами и принять за единицу какую-либо определённую прямую, то мы, при нашем понимании рациональности, должны принять за рациональные величины те, которые, будучи измерены этой единицей, выражаются *рациональными числами*.

---

[4]) Legendre, Eléments de géométrie, Paris, 1794; 12 éd. 1823; русский пер. «Начальные основания геометрии», 1819.

Но, по Евклиду, рациональными оказались бы и все прямые, которые выражаются числами вида $\sqrt{N}$, где N — рациональное число, так как Евклид для рациональности предполагает соизмеримость в более общем смысле, — как *линейно*, так и в *степени*.

Дело значительно осложняется тем, что из площадей рациональными, согласно определению 4, будут только те, которые выражаются *рациональными числами*, так как для площадей не существует соизмеримых в степени, так как *квадрат площади* уже никакого геометрического смысла не имеет.

4. Начало истории иррациональных величин. Пифагорейцам следует приписать открытие *не иррациональных чисел*, а иррациональных или — лучше сказать — *несоизмеримых величин*, т. е. величин, не имеющих общей меры или таких, отношение которых не выражается отношением целых чисел.

Чтобы уяснить себе значение этого открытия, следует встать на ранненифагорейскую точку зрения, которая сохранилась у индусских математиков V—VI вв. н. э.

На этой ступени математического развития считалось, что все геометрические величины могут быть выражены рациональными числами, причём приближённые значения *чисто механически принимались за точные*[5].

Пифагорейцы старались найти отношение диагонали квадрата к его стороне *в числах*, но им удавалось найти только приближённые значения $\sqrt{2}$, и то, что это были не точные, а только *приближённые* значения, ими тоже сначала не осознавалось.

Так получались дроби:

$$\frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \ldots$$

Процесс нахождения приближений, развёртывающийся без конца, должен был навести на мысль (выражая результат в арифметической форме), что не существует рациональной дроби, равной $\sqrt{2}$.

Нельзя точно определить, когда было открыто доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной; по всей вероятности, это имело место в первой половине V в. до н. э. Известно только, что учитель Платона Феодор Киренский уже имел доказательство иррациональности $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и т. д. до $\sqrt{17}$.

Аристотель упоминает о доказательстве несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной, которое аналогично приводимому в дополнениях к X книге (см. комментарий 67) и основано на том, что в случае обратного предположения одно и то же число оказывается и чётным и нечётным.

---

[5]) Tropike, Gesch. der Elementar-Math., **Bd. II, 3. Aufl.**, стр. 82 (C, 5).

Теэтету Афинскому приписывается *первая* теория иррациональных чисел.

Теория пропорций, вначале относившаяся только к соизмеримым величинам и представлявшая теорию числовых пропорций, образцом которой являются арифметические книги «Начал», обращается трудами Евдокса в V книгу евклидовых «Начал», в которой вся теория проводится без обращения к числам. Следующей ступенью развития является теория иррациональных чисел, начало которой кладёт Теэтет, но главная заслуга обработки которой бесспорно принадлежит самому Евклиду.

Освобождение же теории иррациональных чисел от геометрической формы идёт от арабов. Именно арабские комментаторы, в частности Ан-Найризи (Аннариций), постепенно обращают *иррациональные величины* в *иррациональные числа*, называемые у Леонардо Пизанского *глухими*.

5. Процесс Евклида. Первое предложение X книги имеет особенно большое значение в «Началах» Евклида.

На нём основывается так называемый *метод исчерпывания*, на месте которого стоит сейчас современная *теория пределов* и который совершенно неправильно понимали математики второй половины XVIII в., отождествляя его с теорией пределов.

В первом предложении X книги Евклид доказывает, что если от данной величины a отнять величину $b_1 > \frac{a}{2}$, от остатка $c_1 = a - b_1 \leqslant \frac{a}{2}$ отнять величину $b_2 > \frac{c_1}{2}$, от остатка $c_2 = c_1 - b_2 \leqslant \frac{a}{4}$ отнять $b_3 > \frac{c_2}{2}$ и т. д., то после конечного числа n шагов можно получить остаток $c_n \leqslant \frac{a}{2^n}$, меньший любой наперёд заданной величины b.

Конечно, Евклид не мыслит *переменными* величинами; всякая величина для него *не текучая*, а как бы *кристаллизованная*, что, впрочем, характерно и для других понятий в античной науке. Круг идей, в котором вращается даламберова теория пределов[6]), совершенно иной, чем тот, в котором живёт Евклид.

Но мы должны здесь ввести некоторый корректив.

Величины, получаемые *процессом Евклида*, с точки зрения классической математики обращаются в значения переменной, стремящейся к нулю, т. е. *бесконечно малой* (не актуально, а *потенциально*, т. е. в возможности).

Дальнейшая эволюция математической мысли, которая в поисках строгого обоснования Анализа бесконечно малых вынуждена

---

[6]) M. D'Alembert, Encyclopédie des sciences, des arts et des métiers, слово Limite.

была обратиться к *актуальной бесконечности*, т. е. к *теории множеств*, повернула обратно к Евклиду. Она стала характеризовать величину или множество не тем, *что в них есть*, но тем, что мы с ними *можем сделать*.

Бесконечные множества стали определяться как равные или эквивалентные, если возможно установить между ними *взаимно однозначное соответствие*, так что каждому элементу первого множества отвечает один и только один элемент второго, и обратно.

Можно сказать, что то понятие бесконечно малого, которым жил классический Анализ, начало постепенно исчезать.

Бесконечно малое переставало быть тем, что́ изменялось, имея своим пределом нуль, или что́ опускалось ниже всякой поставленной границы, оно становилось тем, что́ *можно сделать по абсолютной величине меньше всякого данного положительного числа*.

Если обозначить последовательность чисел, получаемых в процессе Евклида, через $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$, то, *говоря современным языком* и избегая термина «бесконечно малое», мы можем, как это принято в современном Анализе, написать $a_n < \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ при $n > \nu$, т. е. можно взять ν настолько большим, что для значений n, бо́льших ν, величина a_n будет меньше наперёд заданного положительного числа ε. Конечно, при этом мы сближаемся с Евклидом, удаляясь от Д'Аламбера.

Такая последовательность операций, когда от данной величины отнимают не менее её половины, от остатка тоже отнимают не менее его половины и т. д., называется иногда *алгорифмом Евклида*. Во избежание возможных недоразумений (смешение с известным алгорифмом, изложенным в предложениях 1—3 книги VII) мы будем говорить в этом случае о *процессе Евклида*.

Этот процесс, как известно, является основной операцией при доказательстве различных положений в теории множеств.

Мы например, его употребляем, когда доказываем, что *бесконечное, но ограниченное множество имеет обязательно точку сгущения* (причём берём случай деления не на неравные части, а *пополам*).

Пусть дано множество точек бесконечное, но ограниченное, т. е. помещающееся на отрезке AB. Разделив этот отрезок пополам точкой C, мы должны утверждать, что данное множество бесконечно по крайней мере в одной из половин AC или CB (ибо в противном случае оно было бы конечным). Так же мы поступаем с той половиной, например AC, где оказывается бесконечное множество точек, и т. д. В результате, употребляя процесс Евклида и используя его теорему, мы должны будем уместить бесконечное множество точек на сколь угодно малом отрезке. В это доказательство вводится поправка, благодаря которой интуитивный материал исключается.

Обозначая координаты концов стягивающихся отрезков (т. е. расстояния их от начала отрезка) через

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n,$$
$$b_1 > b_2 > b_3 > \ldots > b_n,$$

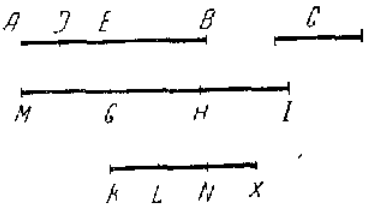
мы будем иметь две *монотонные* последовательности с разностью $b_n - a_n$, которая может быть сделана как угодно малой.

Последнее устанавливает существование предела для начальной и конечной точки стягивающихся интервалов, т. е. существование *не только сгущения, но и точки, в окрестности которой происходит это сгущение.*

6. Второе доказательство предложения 1. В приложениях к 3-му тому Евклидовых Начал в издании Гейберга помещено и другое доказательство предложения 1:

Первая теорема иначе.

Положим две неравные величины AB, C; и поскольку C меньшая, то она, взятая кратной достаточное число раз, когда-нибудь станет больше величины AB. Пусть это случится ⟨с её кратным⟩ IM; разделим его на равные C ⟨части⟩, и пусть они будут MG, GH, HI, и от AB отнимем бо́льшую чем половина ⟨часть⟩ BE, и от EA бо́льшую чем половина ⟨часть⟩ ED, и будем это делать постоянно, пока ⟨количество⟩ делений в IM не сделается равным ⟨количеству⟩ делений в AB. Пусть это случится с BE, ED, DA, и пусть DA будет равна каждой из KL, LN, NX, и будем это делать, пока ⟨количество⟩ делений KX не сделается равным ⟨количеству делений⟩ IM (черт. 1).



Черт. 1.

И поскольку BE больше половины BA, то BE будет больше EA; значит, тем более, она будет больше DA. Но DA равна XN; значит, BE будет больше NX. Опять, поскольку ED больше половины EA, она будет больше DA. Но DA равна NL, значит, ED будет больше NL. Значит, вся DB будет больше XL. Но DA равна LK. Значит, вся BA будет больше XK. Но MI больше чем BA; значит, тем более, MI будет больше XK. И поскольку XN, NL, LK равны между собой, также и MG, GH, HI равны между собой, и количество ⟨делений⟩ в MI равно количеству в XK, то значит, будет, что как KL к IH, так и KX к IM (предложение 15 книги V). Но IM больше KX; значит, и HI больше LK (предложение 14 книги V), и IH равна C, KL же ⟨равна⟩ AD; значит, C будет больше AD; что и требовалось доказать).

7. Аксиома Архимеда. Не следует считать предложение 1 книги X за эквивалент архимедовой аксиомы, по которой для любых a и b всегда можно найти такое целое число n, что будет $na > b$.

Мы уже видели, что в планиметрических книгах Евклид нигде не выставляет это положение как *аксиому*, но вносит свойство, выражаемое аксиомой Архимеда, *в определение величин, между которыми может существовать отношение* (определение 4 книги V).

Архимед же вполне определённо выставляет следующее положение в форме аксиомы:

Если даны две неравные величины a и b ($a > b$), то кратное их разности ($a - b$) может превзойти всякую данную величину.

Есть основания приписывать первое выявление этой аксиомы Эвдоксу[7]). За это, между прочим, говорят слова и самого Архимеда, который замечает, что этой леммой пользовались другие геометры, например, при доказательстве предложений о том, что площади кругов относятся между собой как квадраты радиусов или объёмы сфер — как кубы радиусов, а также при определении объёмов пирамид и параллелепипедов.

Все эти открытия приписывают Эвдоксу.

Мы проанализируем, пользуясь современным обозначением зависимости как первого, так и второго (в дополнениях) доказательств от архимедовой аксиомы.

В первом доказательстве своим процессом Евклид из a получает отрезки

$$c_1 < \frac{a}{2}, \quad c_2 < \frac{a}{4}, \quad \ldots, \quad c_n < \frac{a}{2^n}.$$

Он задаёт произвольно b и строит отрезок

$$d = nb,$$

где n означает порядок c_n.

Но можно всегда, на основании аксиомы Архимеда, n выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$nb > a,$$

а так как

$$a > c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

то, следовательно,

$$nb > c_1 + c_2 + \ldots + c_n.$$

Но

$$c_n < c_{n-1} < \ldots < c_1 \qquad (*)$$

и потому

$$n c_n < c_1 + c_2 + \ldots + c_n,$$

значит, $nc_n < nb$ и $c_n < b$.

---

[7]) Eutocius, Comment. в «Archimedis Opera omnia» ed. Heiberg, III, Leipzig, 1880—1881.

Второе доказательство тоже включает утверждение о возможности подбора такого n, чтобы выполнялось неравенство

$$d - nb < a.$$

Здесь строится ещё отрезок $nc_n = l$, который в силу соотношения (*) будет меньше a, и, следовательно, меньше d. Затем используется пропорция

$$c_n : b = l : d,$$

и из того, что $l < d$, заключается, что также

$$c_n < b.$$

8. Парадокс Зенона [8]. То, что Евклид в своём процессе (см. комментарий 5) не мыслит ни актуально ни потенциально бесконечно малого, мы вполне выявим анализом того настроения умов, в атмосфере которого он жил. Здесь следует вспомнить *парадоксы Зенона* (около 490—430 до н. э.), философа элейской школы, в которых в настоящее время часто видят гораздо больше того, что в них заключается.

Если попытаться выразить языком евклидовых Начал сущность возражений Зенона против движения, то можно, пожалуй, сказать, что она сводится к следующему.

Движения не существует. Почему? Потому, что движущееся тело должно было бы завершить *не завершающийся* евклидов процесс.

Быстроногий Ахилл, говорит Зенон, не может догнать черепахи, так как, когда Ахилл передвигается на половину расстояния от черепахи, последняя передвигается на небольшое расстояние, которое она прошла в то же время. Когда Ахилл передвигается опять на половину остающегося расстояния, черепаха тоже переменяет своё место, продвигаясь вперёд, и т. д.

Этот процесс деления пополам расстояния между черепахой и Ахиллом никогда не может быть закончен. Отсюда делается заключение, что Ахилл никогда *не догонит черепахи*.

На первый взгляд кажется, что простейшим объяснением парадокса является следующее. Зенон из того, что ему потребуется бесконечное время для завершения процесса Евклида, неправильно заключает, что результат этой операции *не существует*.

Но действительная причина здесь лежит несколько глубже: невозможность выводится из того, что завершение этой операции предполагает *актуальную бесконечность*, т. е. завершённую бесконечность, с которой мы вполне примирились, — более того: положили в основу логического обоснования Анализа, — но которая в глазах древних всегда являлась понятием *неприемлемым*.

---

[8]) А. Маковельский, Досократики, ч. 2, Казань, 1915.— С. А. Богомолов, Актуальная бесконечность, Л. — М., 1934.

Аристотелевская критика зеноновских парадоксов основывалась на установлении различия между *актуальной и потенциальной* бесконечностью и признании *потенциально-бесконечной делимости* характеристическим свойством *непрерывного*.

«... Ошибочно рассуждение Зенона, - указывал Аристотель[9]), - «что невозможно пройти бесконечное, т. е. коснуться бесконечного множества отдельных частей в ограниченное время. Ведь длина и время, как и вообще всё непрерывное, называются бесконечными в двояком смысле: или в отношении деления или в отношении границ. И вот, бесконечного в количественном отношении нельзя коснуться в ограниченное время, бесконечного согласно делению — возможно, так как само время в этом смысле бесконечно».

Хотя некоторые авторы и стараются в «Эфодике» Архимеда, в псевдоаристотелевском сочинении «О неделимых линиях» видеть что-то вроде актуально бесконечно малого в актуально бесконечном числе[10]), т. е. неделимые Кеплера[11]) и Кавальери[12]), но, вникнув глубже в античную мысль, мы не найдём ничего такого, что бы вполне определённо и ясно говорило за эту точку зрения, а изучение хода средневековой мысли уже вполне выявляет ту эволюцию мысли, которая от отрицания бесконечности привела к её признанию сперва в теологической, затем космологической и, наконец, математической области.

То же следует сказать о потенциальной бесконечности, заключающейся в понятии *предела*. Я не буду разбирать довольно тонкий вопрос о различии аристотелевского понятия потенции и просто логической возможности, которая входит в даламберовское и современное понятия математической потенциальной бесконечности. Отмечу лишь, что в аристотелевском понятии потенциальной бесконечности предполагается только переход через все ставящиеся границы, но понятие это не заключало и следа *приближения к определённой цели*.

Как Евклид смотрел на свой процесс?

Я думаю, что того противоречия, которое видел Зенон, Евклид не видел. Он не видел в нём актуальной бесконечности. Вернее всего, он стоял на точке зрения Аристотеля. Влияние

---

[9]) Аристотель, Физика, кн. VI; пер. В. П. Карпова, 1937.

[10]) Ф. Петрушевский, Архимеда две книги «О шаре и цилиндре», «Измерение круга» и «Леммы», СПБ, 1823. Archimedis opera omnia, ed. Heiberg, Leipzig, 1880 — 1881, vol. II, «Квадратура параболы».

[11]) Kepler, Nova stereometria doliorum vinariorum (Linz, 1615). Русск. перевод: «Новая стереометрия винных бочек», — М. — Л., 1935.

[12]) Cavalieri, Geometria indivisibilium continuorum nova quadam ratione promota, 1635. Бонавентура Кавальери, Геометрия неделимых, пер. С. Я. Лурье, 1939.

логики Аристотеля[13]) на Евклида стоит вне сомнения. Я думаю что аристотелевское решение элейских парадоксов было в то время принято большинством, в том числе и Евклидом.

9. Необходимое и достаточное условие несоизмеримости. Евклид доказывает, что невозможность ограничиться конечным *числом шагов в применении его алгорифма* является достаточным признаком иррациональности. В сущности для *доказательства иррациональности* это только и нужно.

Но, как указывает Клавий[14]), имеет место и обратная теорема:

Если из двух данных несоизмеримых величин всегда вычитается меньшая из большей попеременным вычитанием, то никогда последующая не будет измерять предыдущую.

Пусть, говорит Клавий, из двух величин AB и CD вычитается меньшая AB из большей CD и остаётся остаток ED. Также пусть из AB вычитается ED, остаётся FB и т. д. Я утверждаю, что при таком попеременном вычитании никогда последняя не будет измерять предыдущую.

Ибо, если это будет, то FB измерит предыдущую ED. Но вследствие того, что FB измеряет ED, а ED измеряет AF, то FB измеряет также и AF. Но она измеряет себя. Поэтому FB измеряет и целую AB. Но AB измеряет CE, так что FB измеряет и CE. Если теперь принять, что FB измеряет ED, то FB измеряет и целую CD. Но доказано, что FB измеряет AB и потому FB измеряет обе AB и CD, что противоречит предположению о несоизмеримости AB и CD.

Геометрический алгорифм Евклида вполне отвечает *арифметическому*; доказательству теоремы 2 и решению задач 3, 4 вполне отвечают предложения 1—3 книги VII. Следует только вместо *числа* поставить *величину* и вместо измерения в арифметическом смысле (по-нашему — деления) поставить геометрическое измерение.

10. Соотношения между величинами и числами. Предложения 5—8 образуют замкнутое целое и разбирают вопрос: когда *отношение между двумя величинами может быть выражено в числах?* Ответ на поставленный вопрос заключается в том, что это имеет место только для соизмеримых величин.

В рассуждениях Евклида имеется один существенный пробел.

Определение пропорциональности между числами установлено Евклидом в определении 21 книги VII:

Числа являются пропорциональными, если первое от второго и третье от четвёртого будут равнократными, или той же самой частью, или теми же частями.

Определение пропорциональности величин дано в определении 5 книги V.

---

[13]) Aristoteles, Analytica priora, Opera omnia ed. Didot, 1848—1859.

[14]) Clavius, Opera math., 1612; Elem. Eucl. lib. X, prop. 2, стр. 399.

«Говорят, что величины *находятся в том же отношении*, первая ко второй и третья к четвёртой, если равнократные первой и третьей одновременно больше, или одновременно равны, или одновременно меньше равнократных второй и четвёртой каждая каждой при какой бы то ни было кратности, если взять их в соответственном порядке».

Ниоткуда не следует, что первое определение является частным случаем второго. Соответствующее доказательство было включено Симсоном в его издание Евклида (см. Heath, The thirteen Books of Euclid's Elements, vol. II, 126, 2-е изд., Cambridge, 1926).

Нужную нам часть доказательства можно изложить так.

Если числа a, b, c, d составляют пропорцию

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

то, согласно определению 21 книги VII,

$$a=mb, \quad c=md,$$

где m — некоторое рациональное число.

Возьмём два любых числа p и q; тогда, если

$$mp \gtreqless q,$$

то и

$$pa \gtreqless qb, \qquad pc \gtreqless qd,$$

а это и означает, что наши числа будут пропорциональными в смысле определения 5 книги V.

Если теперь будем большими буквами изображать величины, а малыми числа, то для двух соизмеримых величин A и B с общей мерой C будут иметь место равенства

$$A=dC, \quad B=eC,$$

где d и e будут некоторые вполне определённые целые числа.

Так как

$$\frac{A}{C}=d, \quad \frac{B}{C}=e,$$

то

$$\frac{A}{C}=\frac{d}{1}, \quad \frac{B}{C}=\frac{e}{1} \quad \text{или} \quad \frac{C}{B}=\frac{1}{e},$$

откуда, «по равенству»,

$$\frac{A}{B}=\frac{d}{e}.$$

Таким образом, A по отношению к B и d по отношению к e будут равнократными, т. е. пропорциональными в смысле 21, VII; поскольку же доказано, что 21, VII будет частным случаем 5, V, то величины A и B будут пропорциональными числам d и e и в смысле определения 5 книги V.

В предложении 6 доказывается обратная теорема: если $\frac{A}{B} = \frac{d}{e}$, то существует общая мера для A и B.

Имеем:

$$\frac{A}{d} = C, \quad eC = I.$$

Отсюда

$$\frac{A}{C} = \frac{d}{1}, \quad \frac{C}{I} = \frac{1}{e}.$$

«По равенству»

$$\frac{A}{I} = \frac{d}{e}.$$

Из равенства отношений $\frac{d}{e}$ заключаем, что

$$\frac{A}{B} = \frac{A}{I};$$

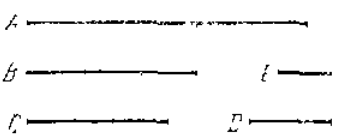
по предложению 9 книги V это равносильно равенству $B = I$. Поскольку же C есть общая мера A к I, то, значит, она будет общей мерой и для A и $B = I$.

Доказательства предложений 7 и 8 не требуют пояснений. (*И. Б.*)

11. Другое доказательство предложения 6. В приложении к изданию «Евклидовых Начал» Гейберга приводится также и следующее доказательство этой теоремы.

6-е предложение иначе.

Пусть две величины A, B имеют между собой отношение, как число C к числу D; я утверждаю, что эти величины будут соизмеримыми (черт. 2).



Черт. 2.

Действительно, сколько будет в C единиц, на столько равных ⟨частей⟩ пусть будет разделена A, и пусть E будет равна одной из них; значит, будет, что как единица к числу C, так и E к A (предложение 15 книги V). Будет же, что и как C к D, ⟨так и⟩ A к B; по равенству (предложение 22 книги V), значит, будет, что как единица к D, ⟨так и⟩ E к B. И единица измеряет D; значит, и E измеряет B. Также и E измеряет A, поскольку и единица ⟨измеряет⟩ C; значит, E измеряет каждое из A, B;

значит, A, B будут соизмеримы, и общей их мерой будет E, что и требовалось доказать».

12. Теорема Теэтета. Предложение 9 книги X равносильно утверждению, что корень из неточного квадрата не может выражаться соизмеримым числом.

В формулировке теоремы («соизмеримы в степени») интересно отметить одно обстоятельство, указывающее, до какой степени прочно в уме греческого математика укоренилась идея о целочисленной пропорциональности.

Первоначальное определение отношения (определения 3, 5 книги V) предполагало целое число, указывающее, во сколько одно число или одна величина больше другой; так появилось представление о «части (μέρος)» и «кратном (πολλαπλάσιος)», т. е. в нашем смысле об n и $\frac{1}{n}$, где n — целое число. Дальше произошло расширение понятия отношения на дробные числа (в нашем смысле), возникло определение 4 книги VII, понятие частей (μέρη), т. е. $\frac{m}{n}$. Нужно, однако, отметить, что евклидова «дробь» в действительности представляла пару целых чисел m и n, при помощи которых выражалось данное отношение. После открытия иррациональности $\sqrt{2}$ пришлось отказаться от возможности выражения в целых числах всех отношений величин; однако наряду с несоизмеримыми *линейно* (μήκει) возникли соизмеримые *в степени* (δυνάμει), отношение квадратов которых выражалось при помощи целых чисел.

Несоизмеримость $\sqrt{2}$ была установлена пифагорейцами, по всей вероятности, не позже середины V в.; несоизмеримость $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, ..., $\sqrt{17}$ знал уже Феодор Киренский, учитель Платона, во второй половине V в.; наконец, несоизмеримость квадратного корня из неточного квадрата была установлена Теэтетом (первая половина IV в.), как о том свидетельствует схолия к рассматриваемому предложению (предложение 62 книги X, Euclides (Heiberg), V, стр. 45):

«Теорема эта является теэтетовым изобретением и о ней упоминает Платон в «Теэтете», но там она находится в более частном виде, здесь же в более общем; действительно, там он говорит о том, что квадраты, измеряемые квадратными числами, имеют и стороны соизмеримые. Но это более частное предложение, ибо оно не охватывает все соизмеримые площади, у которых и стороны являются соизмеримыми».

Предложение 9 с нашей точки зрения сводится к равенствам

$$A:B = c:d,$$

$$A^2:B^2 = c^2:d^2,$$

где A, B — длины, а c, d — измеряющие их отношение целые числа.

У Евклида доказательство идёт сложнее. При доказательстве прямой теоремы он от равенства

$$A:B = c:d$$

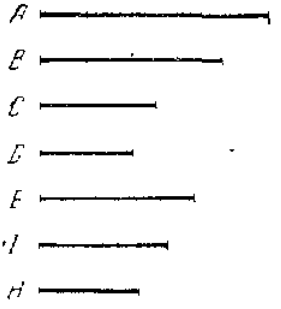
восходит к равенству $A^2:B^2 = c^2:d^2$ при помощи ссылок: 1) на предложение 20 книги VI — отношение площадей подобных фигур равно двойному отношению сходственных сторон, 2) на предложение 11 книги VIII — отношение квадратных чисел равно двойному отношению их сторон — и 3) на положение, что равенство двух отношений влечёт за собой и равенство соответствующих двойных отношений, которое у Евклида нигде специально не выражено, но может быть получено в результате некоторого видоизменения предложения 22 книги VI.

Доказательство обратной теоремы опирается на обратное положение, что равенство двойных отношений влечёт за собой и равенство простых отношений (*И. В.*).

13. Другое доказательство предложения 9. В приложении к 3-му тому гейберговского издания Евклида приведено ещё следующее доказательство:

«9-е предложение иначе (черт. 3).

Действительно, поскольку A соизмеримо с B, то оно имеет отношение, как число к числу (предложение 6). Пусть оно будет иметь ⟨отношение⟩, как C к D, и пусть C, умножая само себя, произведёт E, C же, умножая D, произведёт I, D же, умножая само себя, произведёт H. Поскольку теперь C, умножая само себя, произвело E, умножая же D, произвело I, то, значит, будет, что как C к D, т. е. как A к B, [так и] E к I (предложение 17 книги VII). Но как A к B, так и ⟨квадрат⟩ на A к ⟨прямоугольнику⟩ между A, B; значит, будет, что как квадрат на A к ⟨прямоугольнику⟩ между A, B, так и E к I. Опять, поскольку D, умножая само себя, произвело H, C же, умножая D, произвело I, то значит, будет, что как C к D, т. е. как A к B, так и I к H (предложение 17 книги VII). Но как A к B, так и ⟨прямоугольник⟩ между A, B к ⟨квадрату⟩ на B; значит, будет, что как ⟨прямоугольник⟩ между A, B к ⟨квадрату⟩ на B, так и I к H. Но как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨прямоугольнику⟩ между A, B, так было и E к I; по равенству» (предложение 22 книги V), значит, — как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B, так и E к H. Каждое же из E, H — квадрат; ибо E есть ⟨квадрат⟩ на C, H же ⟨квадрат⟩ на D; значит, ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B имеет отношение, как квадратное число к квадратному числу. Это и требовалось доказать.



Черт. 3.

Но вот пусть ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B будет иметь отношение, как квадратное число E к квадратному числу H; я утверждаю, что A будет соизмеримым с B.

Действительно, пусть у E сторона будет C, у H же — D, и пусть C, умножая D, произведёт I; значит, E, I, H будут последовательно пропорциональны в отношении C к D (предложение 11 книги VIII). И поскольку для ⟨квадратов⟩ на A, B средняя пропорциональная будет ⟨прямоугольник⟩ между A, B, для E, H же ⟨средней пропорциональной будет⟩ I, то значит, будет, что как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨прямоугольнику⟩ между A, B, так и E к I. Как же ⟨прямоугольник⟩ между A, B к ⟨квадрату⟩ на B, так и I к H, но как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨прямоугольнику⟩ между A, B, так и A к B. Значит, A, B будут соизмеримыми; ибо они имеют отношение, как число E к числу I (предложение 6), т. е. как C к D; ибо, как C к D, ⟨так и⟩ E к I; ибо C, умножая само себя, произвело E, умножая же D, произвело I (предложение 17 книги VII); значит, будет, что как C к D, так и E к I».

14. Доказательство существования несоизмеримых чисел. Основная цель предложения 10 и предшествующей ему леммы заключается в том, чтобы показать факт существования величин, которые не будут соизмеримы ни линейно, ни даже в степени.

Это доказательство основано на арифметической теореме (предложение 26 книги VIII), что подобные плоскостные числа имеют отношение, как квадратные числа, и обратно, что неподобные плоскостные числа не могут относиться, как квадратные числа.

Чтобы найти прямую, только линейно несоизмеримую с заданной прямой A, берём два числа B и C, не выражающие отношения точных квадратов, и строим прямую D по уравнению

$$A^2 : D^2 = B : C.$$

Такую прямую D можно построить согласно предложению 6: она будет соизмерима с A в степени, но несоизмерима линейно.

Но если отношение $A:D$ не выражается соизмеримым числом, то отношение $A:E$, где E — средняя пропорциональная между A и D, удовлетворяющая пропорции $A:E = E:D$, не будет соизмеримым даже в степени, так как

$$\left(\frac{A}{E}\right)^2 = \frac{A}{E} \cdot \frac{E}{D} = \frac{A}{D};$$

это же последнее отношение несоизмеримо.

В обозначениях Евклида дело обстоит несколько сложнее: ему приходится доказывать, что если

$$\frac{A^2}{E^2} = \frac{A}{D}$$

и A, D несоизмеримы линейно, то будут несоизмеримы и A^2, E^2. Доказательство же это даётся лишь в следующем предложении (11), которое в ватиканском манускрипте «Начал» нумеруется 10-м. На этом основании, а также и по некоторым другим соображениям Гейберг считает принадлежность этого предложения Евклиду весьма сомнительной.

В «Приложении» Гейберг даёт следующее окончание текста предложения 10.

«Значит, к предложенной прямой, рациональной, от которой, как мы сказали, берётся мера, например A, приисканы соизмеримая в степени, т. е. рациональная только в степени, ⟨прямая⟩ D, иррациональная же E. Действительно, иррациональными вообще он называет ⟨прямые⟩, которые ни линейно, ни в степени не соизмеримы с рациональной» (*И. В.*).

15. Свойства несоизмеримых величин. Легко доказываются следующие теоремы для величин A, B, C, D.

(11) Если $A \cdot B = C : D$ и A соизмерима с B, то и C соизмерима с D.

(12) Если A соизмерима с C и B соизмерима с C, то A соизмерима с B (транзитивность соизмеримости).

(13) Если A соизмерима с B и несоизмерима с C, то и B будет несоизмерима с C.

В «приложении» Гейберг даёт ещё одну теорему, аналогичную предложению 12.

«К предложению 13 лемма на основании приведения к абсурду.

Если будут две величины и одна будет соизмерима, другая же несоизмерима с одной и той же, то величины будут несоизмеримыми (черт. 4).

Черт. 4.

В самом деле, пусть будут две величины A, B и иная C, и пусть A будет соизмерима с C, B же с C несоизмерима. Я утверждаю, что и A будет несоизмерима с B.

Действительно, если A соизмерима с B, также и C с A, то значит, и C будет соизмерима с B (предложение 12); это же не предполагается» (*И. В.*).

16. Теорема Пифагора и иррациональности. В истории возникновения теории иррациональных чисел теорема Пифагора сыграла очень большую и важную роль. Исследования последних лет позволяют пролить некоторый свет на историю её возникновения и условия, определившие развитие процесса постепенного установления этой теоремы.

Первичной формой её выражения был знаменитый египетский треугольник со сторонами 3, 4, 5, существование которого засвидетельствовано для эпохи постройки второй большой пирамиды, принадлежащей фараону Хефрену (около 2800 до н. э.). Возникший первоначально в связи с необходимостью построения прямого угла, треугольник этот в дальнейшем положил начало удобной мере площади; следы этой меры сохранились в старой русской десятине, равнявшейся 2400 кв. сажен и представлявшей площадь

прямоугольника

$$30 \times 80 = 30 \times (40 + 40)$$

или

$$40 \times 60 = 40 \times (30 + 30)$$

квадратных сажен. В дальнейшем развитии теорема Пифагора оказалась связанной с вопросами архитектурной планировки и членения зданий. В первом тысячелетии до н. э. в вавилонской и индусской математике появляются и другие, отличные от 3, 4, 5, типы целочисленных прямоугольных треугольников.

В относящейся ко II в. до н. э. индусской сутре шнура Апастамбы приведён ряд операций с площадями, требовавших применения теоремы Пифагора, которая была известна индусам во всей общности, правда, не для прямоугольного треугольника, но для прямоугольника, в котором квадрат диагонали равнялся сумме квадратов сторон. При помощи теоремы Пифагора производились удвоения, утроения и т. д. площадей; диагональ квадрата называлась dvikarani (делающая вдвое) его стороны; диагональ прямоугольника, построенного на стороне квадрата и его диагонали, называлась trikarani (делающая втрое); треть её составляла так называемую trtiyakarani (делающая в треть). На практике индусам приходилось доходить даже до saptamakarani (усемеряющая). Эта индусская терминология находит свой отзвук в греческих διπλάσιος, τριπλάσιος δυνάμει (двойной, тройной в квадрате), употреблявшихся для обозначения квадрата с площадью вдвое, втрое больше первоначального. Среди искусствоведов существует теория (Хэмбидж), что пропорции греческих зданий, а также и художественных произведений были основаны на целочисленной пропорциональности не линий, но именно площадей; с этим вполне согласуется то обстоятельство, что наши иррациональные числа $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ и т. д. у греков считались только особым видом рациональности; они назывались «рациональными в степени» (евклидово ῥητοὶ δυνάμει).

При помощи теоремы Пифагора индусы складывали и вычитали площади квадратов, причём построения их лишь в деталях отличались от тех построений $\sqrt{a^2+b^2}$ и $\sqrt{a^2-b^2}$, которые изложены в лемме к предложению 14 книги X Евклида.

Предложение 14 устанавливает, что для четырёх пропорциональных величин

$$a:b=c:d$$

разности a^2-b^2 и c^2-d^2 будут одновременно представлять квадраты величин или соизмеримых линейно с первым членом отношения (a и c) или же несоизмеримых.

Доказательство развивается так: положим $a^2 - b^2 = e^2$ и $c^2 - d^2 = f^2$; тогда из равенства

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2}$$

получаем

$$\frac{b^2 + e^2}{b^2} = \frac{d^2 + f^2}{d^2}$$

или

$$\frac{e^2}{b^2} = \frac{f^2}{d^2},$$

а затем

$$\frac{e}{b} = \frac{f}{d}.$$

Сравнивая (мы сказали бы «перемножая») пропорции

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \quad \frac{b}{e} = \frac{d}{f},$$

получаем

$$\frac{a}{e} = \frac{c}{f},$$

откуда следует, что оба эти отношения будут одновременно выражаться или рациональными, или же иррациональными числами. (*И. В.*)

17. Квадратные уравнения и теория иррациональностей. Предложения 15 и 16 представляют вводные теоремы к весьма важным предложениям 17 и 18.

Общая формулировка этих предложений может быть дана в таком виде.

Если имеются прямые a, b, c, удовлетворяющие условию

$$a + b = c,$$

причём a, b будут соизмеримы (или несоизмеримы) друг с другом, то и c будет соизмерима (или несоизмерима) с каждой из них; обратно, если c соизмерима (или несоизмерима) с одной из a, b, то и a, b будут между собой соизмеримы (или несоизмеримы).

Доказательство предложения 15 не требует пояснений, доказательство 16 ведётся от противного. Если a и b несоизмеримы, то и c будет несоизмерима с каждой из них. Действительно, если бы она была соизмерима, например, с a, то была бы соизмерима и с остатком b; значит, a и b были бы соизмеримы, что противно предположению.

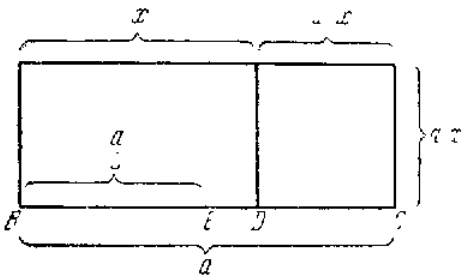
Точно так же, если c несоизмерима с a, то и b будет несоизмерима с a; в противоположном случае a было бы соизмеримо с c, что противно предположению.

Аналогично можно объединить и формулировки парных между собой предложений 17 и 18.

Если a и b суть две прямые $(a > b)$ и a разделена на две части x и y, удовлетворяющие уравнениям

$$x + y = a, \quad xy = \frac{b^2}{4},$$

то разность $a^2 - b^2$ будет представлять квадрат прямой, которая будет соизмерима или несоизмерима линейно с a, в зависимости от того, будут ли соизмеримы или несоизмеримы между собой x и y.



Черт. 5

Обратно, если разность $a^2 - b^2$ представляет квадрат соизмеримой или несоизмеримой с a прямой, то соответственно будут соизмеримы или несоизмеримы и её части x и y.

Доказательство прямой теоремы обоих предложений 17 и 18 сводится к следующему.

На линии $BC = a$ (черт. 5) строим прямоугольник с основанием $BD = x$ так, чтобы было

$$BD \cdot DC = x(a - x) = \frac{b^2}{4},$$

и делим BC в точке E пополам.

По предложению 5 книги II

$$BD \cdot DC + ED^2 = EC^2,$$

что в наших обозначениях равносильно равенству

$$x(a - x) + \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = \frac{a^2}{4},$$

которое после умножения на 4 даёт

$$4x(a - x) + (a - 2x)^2 = a^2$$

или

$$b^2 + (a - 2x)^2 = a^2.$$

Отсюда мы видим, что

$$a^2 - b^2 = (a - 2x)^2.$$

Если теперь x и $a - x$ соизмеримы, то, согласно предложению 15, a будет соизмеримо с x, а затем и с $2x - a$, что и доказывает первую часть предложения 17.

Если же x и $a - x$ не будут соизмеримы, то, согласно предложению 16, a не будет соизмеримо с x, а следовательно, и $a - 2x$.

Обратно, если $a - 2x$ будет соизмеримо (или несоизмеримо) с a, то легко докажем, что и $a - x$ будет соизмеримо (или соответственно несоизмеримо) с x.

Доказательство Евклида проводится так:

1) Дано: $a - x$ соизмеримо с x.

Тогда:

a соизмеримо с x (15, X),
x соизмеримо с $2x$ (6, X),
a соизмеримо с $2x$ (12, X),
a соизмеримо с $a - 2x$ (15, X).

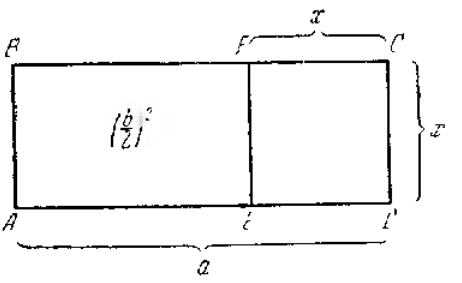
2) Дано: a соизмеримо с $a - 2x$.

Тогда:

a соизмеримо с $2x$ (15, X),
$2x$ соизмеримо с x (6, X),
a соизмеримо с x (12, X),
$a - x$ соизмеримо с x (15, X)

Аналогично проводится доказательство и предложения 18, только вместо «соизмеримо» ставится «несоизмеримо» (кроме положения «x соизмеримо с $2x$») и в ссылках предложения 12, 15 X заменяются предложениями 13, 16 X.

18. Условия рациональности корней квадратного уравнения. Это 17-ое предложение является основным и широко используется Евклидом в его доказательствах.



Черт. 6.

Если даны две прямые a и b ($a > b$) и к a прилагается прямоугольник $ABCD$ так, что по отнятии от него квадрата $EFCD$ остаётся прямоугольник $ABFE$, равный четверти квадрата, построенного на b, причём разность между квадратами, построенными на a и на b, соизмерима с a в *смысле Евклида* (т. е. не только $a^2 - b^2$ с a^2, а и $\sqrt{a^2 - b^2}$ с a), то основание оставшегося прямоугольника $(a - x) = AE$ и основание квадрата $x = ED$ *соизмеримы линейно.*

Евклид строит прямоугольник $ABFE$ так, что до прямоугольника $ABCD$, который может быть построен на данном отрезке AD, недостаёт квадрата $EFCD$ (черт. 6).

Это построение представляет частный случай построения, рассматриваемого в предложении 28 книги VI: к данной прямой приложить параллелограмм (здесь — прямоугольник), равный данной прямолинейной фигуре (здесь — квадрату) и имеющий недостаток.

подобный данному параллелограмму (здесь — квадрату). При этом Евклид прибавляет: необходимо, чтобы фигура, построенная на половине отрезка и подобная недостатку, была не больше данной фигуры (равную которой надо приложить).

Мы в комментариях указывали, каким образом именно в этой частной форме предложение 28 использовалось для решения числового квадратного уравнения

$$x(a-x)=b^2 \tag{1}$$

геометрически имеющего следующий смысл: **площадь** $ABFE$, выражаемая через $AB \times AE$, т. е. $(a-x)x$, **равна данному** квадрату b^2.

Для корней уравнения

$$x^2-ax+b^2=0 \tag{2}$$

имеем формулу

$$x=\frac{a}{2}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4}-b^2}. \tag{3}$$

В предложении 17 берётся четверть квадрата или квадрат, построенный на половине, вследствие чего уравнение (1) заменяется на

$$x(a-x)=\frac{b^2}{4}, \tag{4}$$

а (3) принимает вид

$$x=\frac{a}{2}\pm\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}.$$

Дополнение к формулировке 28, VI представляет условие *вещественности* корней: $a \geqslant b$ (случай $a=b$ Евклид не рассматривает).

Теорема 17 даёт *необходимое* и достаточное условие рациональности корней рассматриваемого уравнения.

Оно состоит в том, что $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ должно быть рациональной дробью.

19. Системы уравнений 2-й степени. В своих рассуждениях Евклид заменяет исследование рациональности корней квадратного уравнения исследованием рациональности решений системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} x+y&=\alpha,\\ xy&=\beta^2,\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которая приводится к квадратному уравнению

$$z^2-\alpha x+\beta^2=0$$

с корнями $z=x,\ y$.

Можно сказать, что Евклид *неявно* пользуется теми свойствами корней квадратного уравнения, которые в чисто алгебраической форме для *буквенного уравнения* были выявлены Виэтой [15]).

Обычно уравнения (1) берутся в виде

$$x+y=a, \quad xy=b. \tag{1'}$$

В евклидовом понимании x и y не числа, а прямые такие, что их сумма определяется, как рациональная прямая a, а прямоугольник между x и y есть b, т. е. какая-то площадь.

Хотя эта система сводится к квадратному уравнению, но можно сказать, что Евклид имеет *в мысли всегда скорее систему уравнений первой и второй степени, чем единичное квадратное уравнение.*

X книга приводит и к системам

$$x+y=a, \quad x^2+y^2=b^2, \tag{2}$$

$$xy=a, \quad x^2-y^2=b^2. \tag{3}$$

Эти системы выражают характерные свойства иррациональностей X книги.

К ним ещё следует прибавить уравнения

$$xy=a, \quad x:y=m:n, \tag{4}$$

дающие прямоугольник между x, y и отношение x к y; затем систему

$$x^2+y^2=b^2, \quad x:y=m:n.$$

Вместо минуса можно брать плюс. Конечно, и в этом случае системе уравнений будут отвечать некоторые свойства, которыми оперируют «Начала». Соотношение $x^2+y^2=b^2$ выражает, что x и y таковы, что сумма квадратов, построенных на x и y как катетах, равна квадрату, построенному на b как гипотенузе.

Следует отметить, что система (4) даётся ещё в древнеегипетском папирусе Кахуна в числовой форме:

$$xy=12, \quad x:y=1:\frac{3}{4},$$

Более того, там имеется система $x^2+y^2=100$, $x:y=1:\frac{3}{4}$,

Интересно то, что уравнение это не приводится к квадратному, а решается «*фальшивым правилом*» (Regula falsi). Полагая $x=1$ и $y=\frac{3}{4}$, получаем $x^2+y^2=\frac{25}{16}$, так что вместо 100 имеем

---

[15]) F. Vieta, De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo, 1591.

$\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$, это указывает, что x нужно изменить в отношении $10:\frac{5}{4}=8$, т. е. взять $x=8$.

Особенное развитие системы квадратных уравнений получили в «Арифметике» Диофанта.

Там мы находим системы, рассматриваемые уже определённо в *числах*. Ищутся числа, удовлетворяющие таким системам, но при этом решения ищутся только в *положительных рациональных числах*, так как для Диофанта не существовали ни отрицательные, ни иррациональные числа. При этом для него не имела значения определённость или неопределённость уравнений в нашем смысле. Наряду с системами двух уравнений с 2 неизвестными он даёт системы двух уравнений с 3, вообще n уравнений с $m>n$ неизвестными.

Привожу некоторые системы, рассматриваемые Диофантом:

$30_{\mathrm{I}})\ x+y=a,\quad xy=b;\qquad 31_{\mathrm{I}})\ x+y=a,\quad x^2+y^2=b;\qquad 32_{\mathrm{II}})\ x+y=a,\quad x^2-y^2=b;$

$33_{\mathrm{I}})\ x-y=a,\quad xy=b.$

Коллекция таких систем обогащается средневековым математиком Савасордой, затем в особенности Неморарием, о которых буду ниже говорить, и Леонардо Пизанским, у которого особенно интересной является система

$$x+y=10,$$
$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\sqrt{5},$$

которая уже не истолковывается на евклидовском геометрическом языке, но приводится к квадратным уравнениям заменой $\frac{y}{x}$ на z, а $\frac{x}{y}$ на $\sqrt{5}-z$.

Затем упомянем о системе $y+\sqrt{x^2+y^2}=16, x-y=2$, которая, наоборот, очень просто выражается в евклидовых терминах.

То же следует сказать и о системе $x+y+z=10$, $xz=y^2$, $z^2+y^2=x^2$, которую Леонардо решает с помощью Regula falsi.

Я сказал, что Евклид мыслит больше *системой*, чем единичным уравнением. Но то же можно сказать и о средневековом математике Иордане Неморарии[16]. В некоторых его задачах основой является система $x\pm y=a$, $xy=b$.

---

[16]) Nemorarius, De numeris datis, ed. P. Treutlein, Abh. Gesch. Math., 2, 1879, стр. 127—166.

Дальнейшая история идёт через Пачиоли[17]), Кардана[18]), Рудольфа[19]) Штиффеля[20]).

20. De numeris datis. От Евклида идут три направления, ведущие к числовому решению уравнений:

Одно — от II книги к VI (предложения 28, 29), приводящее к графическому решению квадратного уравнения, а затем к тому *геометрическому обоснованию* числовых и буквенных формул, разрешающих не только квадратное уравнение, но и кубическое, которое мы находим в старых Алгебрах вплоть до Виэты. Другое — от «Данных» Евклида[21]) и, наконец, третье — от X книги «Начал».

В знаменитом средневековом сочинении Иордана Неморария[22]) мы, конечно, больше всего видим продолжение второго направления. Сама формулировка предложений аналогична формулировке предложений в «Данных», хотя Неморарий уже мыслит *числами*, а не геометрическими величинами.

Мы приводим решение квадратного уравнения трёх типов, причём отметим интересное явление: для каждого из них Неморарий прилагал различный приём.

Уравнение

$$x^2+bx=d \tag{1}$$

он сводит к системе уравнений первой и второй степени:

$$y-x=b, \tag{2}$$

$$xy=d. \tag{3}$$

Эту систему (предложение 5) Неморарий решает так:

$$(y-x)^2=b^2=h,$$

$$(x+y)^2=h+4d=f, \qquad x+y=\sqrt{f} \tag{4}$$

и из (2) и (4) определяются x и y.

Но с уравнением $x^2-px=q$ (предложение 8) он поступает подобно тому, как поступаем мы.

Неморарий пользуется буквенным обозначением.

---

17) L. Pacioli, Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita, Venet., 1494.

18) Cardanus, Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus, Norimbergae, 1545.

19) Christoph Rudolff, Behend und Hudsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre so gemeincklich die Coss genennt werden, Argentorati (Страссбург), 1525.

20) M. Stiffel, Arithmetica integra, Нюрнберг, 1544.

21) Euclides, Data. Opera omnia ed. Heiberg, Leipz., 1883—1896.

22) См. примеч. 16.

Это буквенное обозначение, являясь прототипом буквенной Алгебры Виэты, сильно отличается от последней; так, ab означает не *произведение* a на b, а *сумму* $a+b$.

Неморарий также рассматривает системы уравнений, но методы его ближе к современным, чем к диофантовым.

Мы укажем только те, которые сближаются с X книгой «Начал».

Таковы в IV книге системы

$$\begin{array}{l|l|l|l} x+y=m & x+y=m & xy=m & \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=m \\ x^2+y^2=s & x^2-y^2=s & x^2+y^2=s & \dfrac{xy}{x+y}=s. \end{array}$$

В I книге он рассматривает системы

$$\begin{array}{r|r} x+y=s & x+y=s \\ (x+y)(x-y)-y^2=d & x^2+y^2+(x+y)(x-y)=d \end{array}$$

$$\begin{array}{r|r|l} x+y=s & x+y=s & x-y=s \\ x^2+y^2+(x-y)^2=d & x^2+y^2+xy=d & x^2-y^2=d, \end{array}$$

которые легко упрощаются на основании простых алгебраических тождеств, отвечающих предложениям II книги «Начал».

21. Числовое квадратное уравнение. Евклид не даёт решения числового квадратного уравнения. Но бесспорно, что уже античные математики обладали приёмами решения таких уравнений.

Но с какого времени? Некоторые настаивали на том, что этими методами обладал Евклид и что без них будто бы и не могла создаться X книга [23].

* Исследования последних лет (Нейгебауэр и др.) с полной достоверностью позволяют утверждать, что числовое решение квадратных уравнений было известно математикам древнего Вавилона приблизительно за 2000 лет до н. э., причём возможно даже с очень большой степенью вероятности восстановить тот процесс, при помощи которого они нашли формулы, дающие решения квадратных уравнений. Исходной точкой их рассуждений была задача: зная площадь и периметр прямоугольника, определить его стороны. Эта задача приводится к системе уравнений

$$x+y=a, \quad xy=b,$$

которую вавилоняне решали следующим образом.

---

[23]) Д. Мордухай-Болтовской, Первые шаги буквенной алгебры, Известия СКГУ, 1928.

В качестве первого приближения они брали

$$x = y - \frac{a}{2}$$

и затем подыскивали, какое число z нужно соответственно прибавить к длине и отнять от ширины, чтобы получить заданную площадь:

$$\left(\frac{a}{2} + z\right)\left(\frac{a}{2} - z\right) = b.$$

Владея аппаратом элементарных алгебраических преобразований, вавилоняне без труда получали

$$\frac{a^2}{4} - z^2 = b,$$

откуда

$$z = \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

После этого длина и ширина получались по формулам

$$x = \frac{a}{2} + z = \frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} - b},$$

$$y = \frac{a}{2} - z = \frac{a}{2} - \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}.$$

Аналогично решалась и система

$$x - y = a, \qquad xy = b.$$

В качестве вспомогательного неизвестного теперь принималось среднее значение длины и ширины z, к которому соответственно прибавлялась и вычиталась половина разности:

$$x = z + \frac{a}{2}, \qquad y = z - \frac{a}{2},$$

что приводило к уравнению

$$z^2 - \frac{a^2}{4} = b,$$

откуда

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} + \frac{a}{2}, \qquad y = \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} - \frac{a}{2}.$$

Что эти формулы были получены алгебраическим, а не геометрическим методом, можно видеть из следующих соображений:

1) Все корни во встречающихся задачах (а их свыше тысячи) являются рациональными; около 90% всех задач имеют корнями $x = 30$, $y = 20$.

2) Среди более чем тысячи задач, относящихся к классической эпохе развития вавилонской математики (первая половина второго тысячелетия до н. э.), нет ни одной, где для составления уравнения или его решения приходилось бы пользоваться теоремой Пифагора (единственный текст, где она употребляется при составлении уравнений, относится к селевкидской эпохе).

3) При составлении уравнений вавилоняне частенько складывают длины и площади и т. п., что с точки зрения геометрического решения является абсурдом.

Наконец, решающим обстоятельством является то, что вышеприведённая реконструкция вавилонского метода решения квадратного уравнения действительно имеется в подлинной записи вавилонского математика (Neugebauer, Mathematische Keilschrifttexte, т. 3).

То обстоятельство, что в предложении 17 рассматриваются условия рациональности корней квадратного уравнения, тоже является аргументом в пользу того, что в эпоху Евклида (а может быть, и ранее — в эпоху Теэтета) греческие математики уже были знакомы с числовым решением квадратных уравнений*).

Арабские математики утверждают, что Гиппарх (II в. до н. э.) решал числовые квадратные уравнения, что вполне соответствует тому обстоятельству, что Гиппарх во многом шёл по стопам вавилонских астрономов. Герон [24]) также решал числовые квадратные уравнения. У него встречается задача об определении диаметра круга, если дана сумма площади, окружности и диаметра. Эту задачу приводят в доказательство того, что Герон мыслил не как Евклид — геометрическими величинами, а абстрактными числами.

В дошедших до нас книгах «Арифметики» Диофанта нет изложения общей методы решения квадратного уравнения, но есть одна фраза, в которой *обещается* такое решение, вследствие чего представляется вероятным, что книга, в которой находилось это решение, утеряна.

Формула (конечно, риторическая), решающая квадратное уравнение, даётся Ариабхатой [25]) (476) и Брахмагуптой [26]) (598).

---

*) Часть текста, ограниченная звёздочками, принадлежит И. Н. Веселовскому. (*Прим. ред.*)

[24]) Heronis, Opera IV, ed. Heiberg, Leipz., 1912.

[25]) Tropfke, Gesch. der Elementar-Math., Bd. III, 3. Aufl., 1937 (B, 4). — L. Rodet, Leçons de calcul d'Aryabhata, Journal Asiatique, série 7, t. XIII, Paris, 1879.

[26]) Colebrooke, Algebra from the sanscrit of Brahmagupta and Bhaskara, London, 1817.

22. Евклид и решение уравнений. Древние строго отличали *Логистику*, т. е. искусство вычислять, от *Арифметики* — науки о числах. Логистика считалась наукой низшего рода и, в противоположность индусам, греками очень слабо развивалась.

В VI книге Евклид дает *построение*, разрешающее те задачи, которые приводят к квадратному уравнению.

Построение весьма общего характера должно было сузиться в своей постановке, т. е. *параллелограмм* должен был заменяться *квадратом*. В комментарии 29 к VI книге я показал, как из этой специальной *формы* арабы развили графическое решение квадратного уравнения.

Клавий [27]) не довольствуется при изложении предложения 17, X одной ссылкой на предложение 28, VI; он развивает полностью построение для этого частного случая, когда требуется, задав две неравные прямые a и b, приложить к большей a прямоугольник, равный четверти квадрата на меньшей b с недостающим квадратом.

Арабские математики находились в той же зависимости от греческой, как и индусской, в которой вне сомнения решение числовых уравнений имело место. Если искать здесь влияния со стороны греческой математики, то его скорее можно найти в трех приемах преобразований, которые основываются на II книге, а также в содержании «Данных» Евклида.

Но «Данные» тоже не занимаются решением числовых квадратных уравнений; *они только доказывают, что то, что определяется теми условиями, которые приводят к квадратному уравнению, дано*, т. е. существует в евклидовом смысле, иначе говоря, может быть построено, хотя точно не указывается, как оно строится.

Наконец, в X книге мы встречаем цели, очень удалённые от числового решения уравнения — исследование рациональности и иррациональности геометрических величин (лучше сказать — соизмеримости и несоизмеримости с данной), определение которых приводит к *квадратному или биквадратному уравнению*.

23. Рациональные площади. С предложения 19 античные комментаторы начинали второй отдел X книги, как можно видеть из схолий к предложению 19 (Heiberg, т. V, № 132, стр. 434): «До сих пор нам рассказывалось о соизмеримых и несоизмеримых, отсюда же об рациональных и медиальных» (Heiberg, № 133). «Вторая глава, в которой он учит о рациональных и медиальных, соизмеримых в степени и линейно, и о площадях, которые они заключают, и он сообщил о родстве медиальной с рациональной, о различии, о способах нахождения и тому подобном».

Формулировку начальной леммы Хиз (T. L. Heath) считает слишком растянутой, не дающей ничего нового и поэтому

---

[27]) Clavius, Opera math., 1612, Elem. Eucl. lib. X, prop. 17.

недостойной Евклида, *однако на неё есть* (правда, не всегда очень удачные) ссылки в последующих предложениях (19, 20), во всяком случае, Гейберг не поместил эту лемму в «Приложении», как сомнительную.

Предложение 19 и обратное ему 20 с нашей точки зрения равносильны теоремам:

1) Произведение двух рациональных величин будет тоже величиной рациональной.

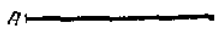
2) Частное от деления рациональной величины на рациональную будет тоже величиной рациональной.

Доказательство этих предложений настолько просто, что не требует комментариев.

В «Приложении» Гейберг *поместил следующую лемму к предложению* 20:

«Лемма.

Квадрирующая иррациональную площадь будет **иррациональной** (черт. 7).



Черт 7.

В самом деле, пусть *A* квадрирует иррациональную площадь, т. е. пусть квадрат на *A* будет равен иррациональной площади, я утверждаю, что *A* будет иррациональной.

Действительно, если *A* будет рациональной, то и квадрат на ней будет рациональным; ибо так [стоит] в определениях (определение 4). Он же не будет; значит, *A* будет иррациональной, что и требовалось доказать». (*И. В.*)

24. Медиаль. В *предложении* 21 вводится *новое понятие* о так называемой медиали (μέση, буквально средняя); так называется прямая, квадрирующая прямоугольник между двумя сторонами, выражаемыми квадратными корнями из рациональных чисел, или, выражаясь языком Евклида, — между двумя рациональными, соизмеримыми только в степени прямыми: если последние обозначать через $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, то медиаль будет равна

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}} = \sqrt[4]{\alpha\beta}.$$

Предложение 21 Евклида говорит, что произведение **двух** чисел, соизмеримых только в степени, будет иррацио**нальным,** равно как и квадратный корень из этого произведения.

Доказательство Евклида сводится к следующему:

Если выберем в качестве основной одну прямую, на**пример**

$$\sqrt{\alpha} = \rho,$$

то другая, соизмеримая с ней только в степени, будет

$$\sqrt{\beta} = \rho\sqrt{k}.$$

Мы имеем (предложение 1 книги VI):

$$\rho : \rho\sqrt{k} = \rho^2 : \rho^2\sqrt{k}.$$

Это равенство показывает, что ρ^2 и $\rho^2\sqrt{k}$ несоизмеримы (*предложение* II *книги* X), т. е. что при рациональном ρ^2 величина $\rho^2\sqrt{k}$ будет иррациональна (определение 4), равно как и её квадрирующая $\rho\sqrt[4]{k}$, которая и называется медиалью.

Предложение 22 является обратным предыдущему: квадрат медиали, разделенный на рациональную, даёт рациональную, соизмеримую только в степени длину.

В нашем обозначении это свойство является очевидным:

$$\frac{\left(\sqrt[4]{\alpha\beta}\right)^2}{\rho} = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\rho} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{\rho^2}},$$

где под знаком корня стоит рациональное *число*.

Евклиду приходится итти более длинным путём. Полагаем:

$$A = \sqrt[4]{\alpha\beta}, \quad CB = \rho \text{ (рациональная)},$$

$$A^2 = \sqrt{\alpha\beta} = \text{площ. } BD.$$

Требуется доказать, что

$$\frac{\text{площ. } BD}{CB} - CD = x,$$

где CD несоизмерима линейно с $CB = \rho$.

Если положим $HI = CB \cdot CD = \rho \cdot x$, то из равенства *площ.* HI — площ. BD или $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \rho \cdot x$ следует (предложение 14 книги VI):

$$\frac{\rho}{\sqrt{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{x} \quad \left(\frac{BC}{EH} = \frac{EI}{CD}\right),$$

и затем (предложение 20 книги VI):

$$\frac{\rho^2}{\beta} = \frac{\alpha}{x^2}.$$

Поскольку же ρ^2, α, β рациональны, то будет рационально и x^2, а следовательно, и x (определение 4).

Затем,

$$EI.EH = EI^2 : EI \cdot EH \qquad (\sqrt{\alpha} : \sqrt{\beta} = \alpha : \sqrt{\alpha\beta}).$$

Так как $EI^2 = \alpha$ и $CD^2 = x^2$ соизмеримы и

$$EI \cdot EH = BC \cdot CD \quad (\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta} = \rho \cdot x),$$

то, заменив $EI^2 = \alpha$ на $k \cdot CD^2 = kx^2$, где k — рациональное число, мы будем иметь:

$$EI:EH = k \cdot CD^2 : CD \cdot CB = k \cdot CD : CB.$$

Поскольку же $EI = \sqrt{\alpha}$ и $EH = \sqrt{\beta}$ линейно несоизмеримы, то будут линейно несоизмеримы и $k \cdot CD$ с CB, или, так как k и $CB = \rho$ рациональны, $CD = x$ будет линейно несоизмерима с $CB = \rho$, т. е. с той прямой, к которой прикладывается квадрат медиали.

Наконец, предложение 23 утверждает, что всякая прямая, соизмеримая с медиалью, есть тоже медиаль. С нашей точки зрения это равносильно утверждению, что при рациональном k будет:

$$k \cdot \sqrt[4]{\alpha\beta} = \sqrt[4]{k^2\alpha \cdot k^2\beta}.$$

Рассуждения Евклида сводятся к следующему:

Пусть

$$\sqrt[4]{\alpha\beta} = A, \quad \text{а} \quad B = kA = k\sqrt[4]{\alpha\beta}.$$

Берём рациональную прямую $CD = \rho$ и строим прямые:

$$\frac{A^2}{\rho} = \frac{\text{площ. } EC}{CD} = ED,$$

$$\frac{B^2}{\rho} = \frac{\text{площ. } CI}{CD} = DI.$$

Прямая $ED = \frac{\sqrt{\alpha\beta}}{\rho}$ будет линейно несоизмерима с $\rho = CD$, но обе прямые ED и DI будут рациональны. Из пропорции

$$A^2 : B^2 = \text{площ. } EC : \text{площ. } CI = ED : DI$$

заключаем, что DI, соизмеримая линейно с ED, будет линейно несоизмерима с $CD = \rho$ (предложение 11), так как ED и CD линейно несоизмеримы; поскольку же DI и CD рациональны, то это значит, что CD и DI соизмеримы только в степени.

В таком случае $B = \sqrt{CD \cdot DI}$ — среднее геометрическое двух прямых, соизмеримых только в степени, — будет, согласно сделанному определению, медиалью.

В следствии к этому предложению вводится понятие о медиальной площади, под которой нужно подразумевать площадь квадрата, построенного на медиали.

В «Приложении» к гейберговскому изданию Евклида помещено следующее дополнение к следствию из предложения 23.

«Существуют же затем и иные прямые, которые линейно будут несоизмеримы с медиалью, соизмеримы же только в степени, и они тоже называются медиалями вследствие того, что

являются в степени соизмеримыми медиали и соизмеримыми между собой, поскольку медиали, но между собой они соизмеримы или линейно и, конечно, и в степени, или только в степени. И если — линейно, то и самые медиали называются соизмеримыми линейно, ⟨причём⟩ следует, что ⟨они соизмеримы⟩ и в степени; если же они соизмеримы только в степени, то они и в таком случае называются медиалями, соизмеримыми только в степени.

А что медиали соизмеримы, доказать должно так. Поскольку медиали будут соизмеримы с некоторой медиалью, соизмеримые же с одним и тем же, будут соизмеримы и между собой (предложение 12), то, значит, медиали будут соизмеримы. (*И. В.*)

25. Медиальные площади. Следующая группа предложений (24—26) открывается «леммой» того же рода, что и помещённая перед предложением 19, т. е. представляющей своего рода повторение пройденного. Хиз считает эту лемму не принадлежащей к подлинному тексту Евклида и, соответственно, исключает слова «в каком-нибудь из указанных выше смыслов» из формулировки предложения 24.

Рассматриваемые три предложения касаются свойств прямоугольников, построенных на медиалях. Если определять медиальную площадь, как площадь построенного на медиали квадрата (это не формулированное ясно определение лежит в основе следствия к предложению 23), то первое из этих предложений (24) говорит, что прямоугольник, построенный на медиалях, тоже будет представлять некоторую медиальную площадь, если эти медиали будут линейно между собой соизмеримы.

С нашей точки зрения доказательство шло бы так:

Пусть площ. $AC = AB \cdot BC$, где AB и BC — две линейно соизмеримые медиали:

$$AB = \sqrt[4]{ab}, \quad BC = k\sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{k^4ab}.$$

Произведение их

$$AB \cdot BC = \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt[4]{k^4ab} = \sqrt{k^2ab} = \sqrt{ka} \cdot \sqrt{kb}$$

представляет треугольник, построенный на двух соизмеримых только в степени прямых $\sqrt{ka}$ и $\sqrt{kb}$, т. е. медиальную площадь $\sqrt{k\sqrt{ab} \cdot k\sqrt{ab}}$.

Евклидово доказательство сводится к следующему:

Если $AB = \sqrt[4]{ab}$ — медиаль, то площ. $AD = AB^2$ — тоже медиаль. Так как AB и BC соизмеримы, то

$$AB : BC = AB^2 : AB \cdot BC;$$

значит, $AB \cdot BC$ соизмеримо с медиальной площадью AB^2 и, таким образом (предложение 23 книги X, следствие), представляет медиаль.

Предложение 25 касается прямоугольника, построенного на двух соизмеримых только в степени медиалях.

Если $AB = \sqrt[4]{ab}$ — медиаль и $BC = \sqrt{k} \cdot \sqrt[4]{ab}$ — другая медиаль, соизмеримая с AB только в степени ($BC^2 = k \cdot AB^2$, где k — некоторое рациональное число), то

$$AB \cdot BC = \sqrt[4]{ab} \cdot \sqrt{k} \cdot \sqrt[4]{ab} = \sqrt{kab}.$$

Если стоящее под корнем число представляет полный квадрат, то $AB \cdot BC$ есть рациональный прямоугольник. Если же это не имеет места, то

$$AB \cdot BC = \sqrt{\sqrt{kab} \cdot \sqrt{kab}}$$

есть медиальная площадь.

У Евклида доказательство развивается так.

Пусть AB и BC — медиали; их квадраты

$$\text{площ. } AD = AB^2 \text{ и площ. } BE = BC^2$$

будут медиальными прямоугольниками.

Берём рациональную длину

$$\rho = IH = GM = KN$$

и «прикладываем» к ней площади AD, BE и $AC = AB \cdot BC$; получаем длины

$$IG = \frac{\text{площ. } AD}{IH} = \frac{AB^2}{\rho}, \quad GK = \frac{\text{площ. } AC}{GM} = \frac{AB \cdot BC}{\rho},$$

$$KL = \frac{\text{площ. } BE}{KN} = \frac{BC^2}{\rho}.$$

В таком случае на прямой $IG + GK + KL$ расположатся площади

$$GH = AD, \quad KM = AC, \quad NL = BE,$$

из которых первая GH и последняя NL, как квадраты медиалей, будут медиальными.

Затем, так как медиальная площадь соответствует иррациональности 2-го порядка, то отношения

$$\frac{IG}{IH} = \frac{AB^2}{\rho^2}, \quad \frac{KL}{KN} = \frac{BC^2}{\rho^2},$$

где ρ^2 — рациональная прямая, а AB^2, BC^2 — медиали, будут выражаться иррациональностями 2-го порядка, а значит, IG и KL будут соизмеримы с IH только в степени (предложение 22 книги X). Но (предложение 1 книги VI)

$$\text{площ. } HG : \text{площ. } NL = IG : KL$$

или

$$\text{площ. } HG : \text{площ. } NL = \text{площ. } AD : \text{площ. } BE = AB^2 : BC^2,$$

последние же соизмеримы между собой, поскольку стороны AB и BC этих квадратов соизмеримы в степени; значит, IG и KL соизмеримы между собой линейно.

Далее, из пропорций

$$DB:BC = AB:BX,$$
$$DB:BC = \text{площ. } AD:\text{площ. } AC,$$
$$AB:BX = \text{площ. } AC:\text{площ. } CX$$

получается

$$\text{площ. } AD:\text{площ. } AC = \text{площ. } AC:\text{площ. } CX$$

или

$$\text{площ. } HG:\text{площ. } MK = \text{площ. } MK:\text{площ. } NL,$$

откуда, разделяя на $\rho = IH$ (предложение 1 книги VI), получаем:

$$IG:GK = GK:KL,$$
$$GK^2 = IG \cdot KL.$$

Но IG и KL суть рациональные длины, соизмеримые только в степени с $\rho = IH$, значит, GK^2 будет рациональным, соизмеримым линейно с ρ^2.

Если теперь GK соизмеримо с $\rho = IH = GM$ линейно, то прямоугольник $GN =$ площ. $AC = AB \cdot BC$ будет рациональным; если же GK соизмеримо с ρ только в степени, то прямоугольник GN, как произведение двух квадратных иррациональностей, будет медиальным.

Наконец, предложение 26 утверждает, что разность двух медиальных площадей не может быть рациональной; в современной алгебре этому отвечает положение, что разность двух иррациональных величин $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ не может выражаться рациональным числом.

Идея доказательства Евклида по существу совпадает с той, которая лежит в основе современного доказательства. Он ведёт доказательство от противного.

Пусть AB и AC — две медиальные площади (значит, квадраты их будут рациональны), DB — их разность, которую мы предполагаем рациональной.

Берём рациональную длину EI и прикладываем к ней площади $IG = AB$ и $IH = AC$; их разность $KG = BD$ будет, согласно предположению, рациональной.

В таком случае длины

$$EG = \frac{\text{площ. } AB}{IE}, \qquad EH = \frac{\text{площ. } AC}{IE},$$

как частные от деления медиальной площади на рациональную длину, будут выражаться иррациональностями 2-й степени, т. е.

они будут соизмеримы с EI только в степени, тогда как $HG = \frac{\text{площ. } KG}{EI}$, как частное от деления рациональной площади на рациональную длину, будет линейно соизмерима с EI.

Отсюда следует, что EG, EH, несоизмеримые с EI, будут также несоизмеримы линейно и с HG (предложение 13).

Но

$$EH:HG = EH^2:EH \cdot HG;$$

значит, квадрат на EH не будет линейно соизмеримым с прямоугольником $EH \cdot HG$.

Далее, поскольку $EG = EH + HG$, будем иметь:

$$EG^2 = EH^2 + HG^2 + 2EH \cdot HG.$$

Так как EH^2 и HG^2 рациональны, $EH \cdot HG$ же не будет соизмерима с EH^2, то EG^2 будет иррациональна; значит, EG даже в степени не будет соизмерима с EH. С другой стороны,

$$EG^2 = \frac{(\text{площ. } AB)^2}{(IE)^2}, \qquad EH^2 = \frac{(\text{площ. } AC)^2}{(IE)^2}$$

оба выражаются рациональными числами; значит, EG^2 и EH^2 линейно соизмеримы, и EI по крайней мере в степени соизмерима с EH. (*И. В.*)

26. Нахождение медиалей, заключающих заданную площадь. С предложения 27 античные комментаторы начинали третий отдел X книги, содержащий своего рода задачи на построение. В схолиях к этому предложению (Heiberg, т. V, № 189, стр. 501) читаем:

«Третья глава, в которой подготовляется нахождение иррациональных, ⟨получающихся⟩ сложением».

Первые два предложения (27 и 28) образуют пару: требуется найти две соизмеримые только в степени медиали, которые заключали бы данную площадь, предполагаемую в предложении 27 рациональной, в 28 же — медиальной. Поставленная задача, очевидно, является неопределенной, тем более, что и величина площади, заключающейся между медиалями, тоже не задаётся численно.

Первая задача решается так. Для двух произвольных, соизмеримых только в степени прямых A и B определяется средняя пропорциональная C и, наконец, четвертая прямая D, удовлетворяющая пропорции

$$A:B = C:D.$$

Эти две прямые и будут искомыми.

Действительно, из равенства

$$A:C = C:B$$

следует, что

$$C^2 = A \cdot B.$$

Так как, по предложению 21, произведение двух соизмеримых только в степени прямых есть медиальная площадь, то C^2 будет медиальной площадью (типа $\sqrt{ab}$) и C (равное $\sqrt[4]{ab}$) будет медиалью. Из пропорции же

$$A:B = C:D$$

заключаем, что и D будет медиалью. Действительно, так как A и B соизмеримы только в степени, то $A^2:B^2$ будет рационально; значит, будет рационально и отношение $C^2:D^2$. Отсюда

$$D^2 = kC^2 = k\sqrt{ab},$$

где k — некоторое рациональное число, и значит,

$$D = \sqrt[4]{k^2ab} = \sqrt[4]{(ka)(kb)}.$$

Остаётся доказать, что произведение $C \cdot D$ рационально. Это следует из пропорций

$$A:B = C:D \quad \text{(условие, определяющее } D\text{)},$$
$$A:C = B \cdot D \quad \text{(16, V)},$$
$$A:C = C:B \quad \text{(условие, определяющее } C\text{)},$$

откуда

$$C:B = B:D$$

и, значит,

$$C \cdot D = B^2.$$

Но B^2 как квадрат рациональной, соизмеримой только в степени прямой, представляет рациональную площадь: значит, произведение $C \cdot D$ будет рациональным.

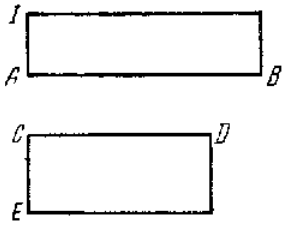
В «Приложении» к гейберговскому изданию Евклида приведена следующая лемма к предложению 27:

«Лемма.

Для двух заданных находящихся в каком-то отношении чисел и какого-нибудь иного ⟨числа⟩ требуется сделать, чтобы как ⟨первое⟩ число ко ⟨второму⟩ числу, так и это ⟨третье⟩ к какому-нибудь иному (черт. 8).

Пусть данные два числа будут AB, CD, имеющие между собой какое-то отношение, иное же какое нибудь ⟨число⟩ CE. Требуется сделать предложенное.

Построим на DC, CE прямоугольный параллелограмм DE, и к AB приложим равный DE параллелограмм BI, производящий ширину AI. Поскольку теперь параллелограмм DE равен параллелограмму BI, он же будет с ним и равноугольным, у равных же и равноугольных параллелограммов стороны при равных углах обратно пропорциональны, то значит, будет пропорция — как AB к CD, так и CE к AI; что и требовалось доказать.



Черт. 8.

Доказательство предложения 28 идёт у Евклида так.

Берутся три соизмеримые только в степени прямые A, B, C и строятся две прямые D и E, удовлетворяющие пропорциям

$$A:D=D:B,$$
$$B:C=D:E.$$

Из этих равенств заключаем, как и для предложения 27, что $D=\sqrt{AB}$ есть медиаль, и E, как соизмеримая с D только в степени, будет тоже медиалью.

После этого остаётся доказать, что произведение $D\cdot E$ представляет медиальную площадь.

Мы имеем:

$$B:C=D:F,$$
$$B:D=C:E \text{ (16, V)},$$
$$B:D=D:A \text{ (условие, определяющее } D\text{)},$$
$$D:A=C:E$$

и, значит,

$$A\cdot C=D\cdot E.$$

Но $A\cdot C$, как прямоугольник между двумя соизмеримыми только в степени прямыми, будет медиальным; значит, и $D\cdot E$ медиально. (*И. В.*)

27. Целочисленные пифагорейские треугольники. С предложения 29 начинается подготовка к построению новых типов иррациональных линий. Соответственно этому античная схолия к этому предложению говорит (Heiberg, т. V, № 204, стр. 507):

«Отсюда начинается отыскание и остальных иррациональных и сначала тех, которые получаются сложением».

Весь отдел начинается двумя леммами, которые и сами по себе представляют значительный интерес.

Первая из них состоит в указании способа нахождения двух чисел таких, чтобы сумма их квадратов была тоже квадратом.

Берём два числа AB, BC одновременно или оба чётных, или оба нечётных (для того чтобы их разность можно было разделить пополам); пусть эти числа будут подобными плоскостными числами

$$AB = mnp^2, \qquad BC = mnq^2.$$

Если разность $AB - BC$, т. е. AC, будет разделена пополам в точке D, то у нас получится прямая AC, которая будет разделена в точке D на равные части, а в точке B внешним образом на неравные.

Согласно предложению 6 книги II можем написать.

$$AB \cdot BC + CD^2 = BD^2,$$

или, в наших обозначениях,

$$mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2.$$

Поскольку же произведение двух подобных плоскостных чисел $mnp^2 \cdot mnq^2$ есть квадрат, то задача выполнена: мы нашли два числа

$$mnp^2 \quad \text{и} \quad \frac{mnp^2 - mnq^2}{2},$$

сумма квадратов которых даёт точный квадрат $\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}$.

В лемме 2 требуется найти два таких квадратных числа, чтобы сумма их не была точным квадратом. Для решения этой неопределённой, вообще говоря, задачи Евклид предлагает следующий приём. Исходя из вышенаписанного равенства

$$AB \cdot BC + CD^2 = BD^2,$$

он отнимает от CD единицу DE и соответственно уменьшает на единицу же BD, т. е. получает некоторую прямую BE. Теперь он хочет доказать, что

$$AB \cdot BC + CE^2$$

или, в нашем обозначении,

$$mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2} - 1\right)^2$$

не может быть квадратным числом. Доказывает он это от противного, утверждая, что вышенаписанное число не может быть

квадратным числом, бо́льшим, равным или меньшим квадратного числа BE^2, равного в нашем обозначении

$$\left(\frac{mnp^2+mnq^2}{2}-1\right)^2.$$

Первая гипотеза легко устраняется. Если

$$mnp^2\cdot mnq^2+\left(\frac{mnp^2-mnq^2}{2}-1\right)$$

есть квадратное число, большее $BE^2=\left(\frac{mnp^2+mnq^2}{2}-1\right)^2$, то оно должно равняться непосредственно следующему квадрату за BE^2, т. е. $\left(\frac{mnp^2+mnq}{2}\right)^2=BD^2$, что невозможно, ибо после вычитания единицы наше число сделалось меньше BD^2; между же $(BD^2-1)^2$ и BD^2 не может лежать никакого квадратного числа «для того (замечает Евклид), чтобы единица не делилась».

Вторая гипотеза опровергается так.

Предположим, что

$$AB\cdot BC+CE^2=BE^2$$

или

$$mnp^2\cdot mnq^2+\left(\frac{mnp^2-mnq^2}{2}-1\right)^2=\left(\frac{mnp^2+mnq^2}{2}-1\right)^2.$$

Сделаем, чтобы точка E была серединой некоторого отрезка; если D была серединой отрезка $AC=mnp^2-mnq^2$, то если мы хотим сохранить конец C неизменным, а середину передвигаем из D в E вправо на одну единицу, то мы и левый конец A должны передвинуть вправо на отрезок $AG=2$ единицам; в таком случае, применяя предложение 6, II к отрезку GC, разделённому пополам в точке E, будем иметь:

$$GB\cdot BC+CE^2=BE^2$$

или

$$(mnp^2-2)\cdot mnq^2+\left(\frac{mnp^2-mnq^2}{2}-1\right)^2=\left(\frac{mnp^2+mnq^2}{2}-1\right)^2.$$

Оба вышенаписанных равенства могут одновременно существовать лишь при условии

$$AB=GB \text{ или } mnp^2=mnp^2-2,$$

что невозможно.

Аналогично опровергается и третья гипотеза.

Если сумма

$$AB \cdot BC + CE^2$$

должна равняться меньшему чем BE^2 квадратному числу BF^2, то из условия $BE^2 > BF^2$ следует $BE > BF$; иными словами, мы должны точку F ещё более приблизить к точке C, сдвигая середину D вправо уже не на отрезок $DE = 1$, но на отрезок $DF = r$, где $r > 1$. Если мы попрежнему хотим, чтобы точка F была серединой некоторого отрезка, кончающегося в C, то начальную точку A мы должны уже сдвинуть вправо на отрезок $AH = 2r$.

Применяя 6, II к отрезку HC, будем иметь:

$$HB \cdot BC + CF^2 = BF^2$$

или

$$(mnp^2 - 2r) \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2} - r\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2} - r\right)^2;$$

с другой стороны, согласно предположению,

$$AB \cdot BC + CE^2 = BF^2,$$

или

$$mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2} - 1\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2} - r\right)^2.$$

Поскольку $HB < AB$ и $CF^2 < CE^2$, то одновременное существование этих равенств невозможно.

Поскольку теперь выражение

$$AB \cdot BC + CE^2 = mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2} - 1\right)^2$$

не может равняться квадратному числу, которое было бы больше, меньше или равно BE^2, то оно вообще не может быть квадратным числом. Таким образом, числа

$$mnp^2 \cdot mnq^2 \quad \text{и} \quad \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2} - 1\right)^2$$

представляют два квадратных числа, сумма которых не равняется квадратному числу.

Интересно отметить, что применённый Евклидом способ построения пифагорейских чисел был уже известен древневавилонским математикам.

Положим для сокращения:

$$\frac{mnp^2}{2} = p'^2, \qquad \frac{mnq^2}{2} = q'^2.$$

Тогда три числа, удовлетворяющие условию

$$mnp^2 \cdot mnq^2 + \left(\frac{mnp^2 - mnq^2}{2}\right)^2 = \left(\frac{mnp^2 + mnq^2}{2}\right)^2,$$

будут:

$$mnpq, \quad \frac{mnp^2 - mnq^2}{2}, \quad \frac{mnp^2 + mnq^2}{2}$$

или, в наших обозначениях.

$$2p'q', \qquad p'^2 - q'^2, \qquad p'^2 + q'^2.$$

Совершенно по этому типу построены числа, выражающие длину, ширину и диагональ прямоугольника в древневавилонской табличке Plimpton 322, опубликованной в «Mathematical Cuneiform Texts» Нейгебауэра (New Haven, 1945), как показывает следующая таблица:

$2p'q'$	$p'^2 - q'^2$	$p'^2 + q'^2$	p'	q'
2,0	1,59	2,49	12	5
57,36	56,7	1,20,25	1,4	27
1,20,0	1,16,41	1,50,49	1,15	32
3,45,0	3,31,49	5,9,1	2,5	54
1,12	1,5	1,37	9	4
6,0	5,19	8,1	20	9
45,0	38,11	59,1	54	25
16,0	13,19	20,49	32	15
10,0	8,1	12,49	25	12
1,48,0	1,22,41	2,16,1	1,21	40
1,0	45	1,15	2	1
40,0	27,59	48,49	48	25
4,0	2,41	4,49	15	8
45,0	29,31	53,49	50	27
1,30	56	1,46	9	5

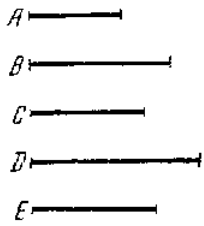
Здесь, как обычно делается при транскрипции вавилонских текстов, надо читать: $1,59 = 1 \cdot 60 + 59$, $1,20,25 = 1 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 25$ и т. д. (*И. В.*)

28. Предложения 29 и 30. В «Приложении» Гейберг предпосылает предложению 29 следующую лемму:

«Лемма к 29-му.

Для заданных двух чисел и прямой должно сделать, чтобы как число к числу, так и квадрат на ⟨заданной⟩ прямой к ⟨квадрату⟩ на иной какой-нибудь (черт. 9).

Пусть данные два числа будут A, B, прямая же C, и должно будет выполнить предложенное. Сделаем, чтобы как A к B, ⟨так и⟩ прямая C к какой-нибудь иной D, и возьмём для C, D среднюю пропорциональную E (предложение 13 книги VI). Поскольку теперь будет, что как A к B, ⟨так и⟩ прямая C к D, но как C к D, так и ⟨квадрат⟩ на C к ⟨квадрату⟩ на E, значит, как A к B, ⟨так и квадрат⟩ на C к квадрату на E.



Черт. 9.

Идея доказательства состоит в том, что

$$A \cdot B = C : D = C^2 : C \cdot D = C^2 : (\sqrt{CD})^2.$$

Составляющие одно целое предложения 29 и 30 заключаются в том, что для заданной прямой $\sqrt{a}$ требуется найти другую $\sqrt{b}$, соизмеримую с ней только в степени так, чтобы разность квадратов этих прямых $(a - b)$ равнялась квадрату на прямой, линейно соизмеримой (предложение 29) или несоизмеримой (предложение 30) с заданной прямой $\sqrt{a}$.

Условие предложения 29 требует, чтобы для прямой $\sqrt{a}$ была найдена другая прямая $\sqrt{b}$ так, чтобы имело место равенство

$$a - b = k^2 a.$$

Наше решение будет:

$$b = (1 - k^2)\, a$$

или

$$\sqrt{b} = \sqrt{(1 - k^2)\, a}.$$

Решение Евклида заключается в том, что он для заданной прямой $AB = \sqrt{a}$ берёт два квадратных числа $CD = m^2$ и $DE = n^2$ таких, чтобы их разность $CE = m^2 - n^2$ не была точным квадратом.

Сначала определяем AI из условия

$$AB^2 : AI^2 = m^2 : (m^2 - n^2),$$

что легко выполняется на основании только что указанной леммы. В нашем обозначении

$$AI = AB \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

Поскольку $\sqrt{m^2-n^2}$ иррационален, то AI будет соизмерима с AB только в степени.

Теперь из пропорции

$$\frac{AB^2}{AI^2}=\frac{m^2}{m^2-n^2}$$

получаем:

$$\frac{AB^2}{AB^2-AI^2}=\frac{m^2}{m^2-(m^2-n^2)},$$

откуда

$$AB^2-AI^2=BI^2=AB^2\cdot\frac{n^2}{m^2},$$

т. е.

$$BI=AB\cdot\frac{n}{m}.$$

Таким образом,

$$AB=\sqrt{a} \text{ и } AI=\sqrt{a}\,\frac{\sqrt{m^2-n^2}}{m}=\sqrt{a}\sqrt{1-k^2},$$

$$\text{если } \frac{n}{m}=k,$$

будут две искомые, соизмеримые только в степени прямые, разность квадратов которых равна $\left(AB\,\frac{n}{m}\right)^2$, т. е. квадрату на прямой, линейно соизмеримой с AB.

Предложение 30 ставит задачу нахождения прямых AB и AI так, чтобы разность их квадратов равнялась квадрату на прямой, несоизмеримой с AB линейно.

Берём $AB=\sqrt{a}$ и два числа $CE=m^2$ и $ED=n^2$, таких, чтобы их сумма $CD=m^2+n^2$ не была точным квадратом.

Затем строим AI из условия

$$AB^2:AI^2=(m^2+n^2):m^2,$$

откуда

$$AI=AB\,\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

Далее, из пропорции

$$CD:CE=(m^2+n^2):m^2=AB^2:AI^2$$

находим при помощи производной пропорции:

$$\frac{m^2+n^2}{(m^2+n^2)-m^2}=\frac{AB^2}{AB^2-AI^2},$$

откуда определяется $BI = \sqrt{AB^2 - AI^2}$:

$$BI = AB \cdot \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}}, \text{ где } k = \frac{m}{n}.$$

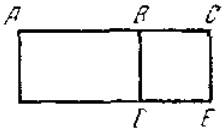
Эти две прямые AB и BI античный схолиаст считает «матерями» биномиальной иррациональности, о которой пойдёт речь в предложении 36 (схолия № 211 к предложению 30 в гейберговском издании Евклида, т. V, стр. 510). (*И. В.*)

29. Предложение 31. Предложение 31, играющее такую же роль по отношению ко второй иррациональности (предложение 37), как 30 к первой, открывается следующей леммой, помещённой у Гейберга в «Приложении».

Лемма к предложению 31.

Если будут две прямые в каком-нибудь отношении, то будет, что как прямая к прямой, так и ⟨прямоугольник⟩ между обеими к квадрату на наименьшей (черт. 10).

Пусть вот будут две прямые AB, BC в каком-нибудь отношении; я утверждаю, что будет как AB к BC, так и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC к ⟨квадрату⟩ на BC. Действительно, начертим на BC квадрат $BDEC$ и дополним параллелограмм AD. Ясно, что будет как AB к BC, так и параллелограмм AD к параллелограмму BE. И AD будет ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC (ибо BC равно BD), BE же — ⟨квадрат⟩ на BC; значит, как AB к BC, так и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC к ⟨квадрату⟩ на BC; что и требовалось доказать».



Черт. 10.

В предложении 31 требуется найти две соизмеримые только в степени медиали, заключающие рациональный прямоугольник так, чтобы разность квадратов на большей и меньшей равнялась квадрату на прямой, соизмеримой или несоизмеримой линейно с большей.

Евклид рассматривает лишь случай соизмеримости.

Берём две прямые линии A и B, удовлетворяющие условиям предложения 29:

$$A = \sqrt{a}, \quad B = \sqrt{(1-k^2)\,a}.$$

Их произведение

$$AB = a\sqrt{1-k^2}$$

будет представлять медиальный прямоугольник. Если $AB = C^2$, то $C = \sqrt{a}\,\sqrt[4]{1-k^2}$ будет медиалью.

Теперь определяем D из условия

$$C \cdot D = B^2 \text{ или } D \cdot \sqrt{a}\,\sqrt[4]{1-k^2} = (1-k^2) \cdot a,$$

откуда

$$D = \sqrt{a}\sqrt{1-k^2}\sqrt[4]{1-k^2} = B\sqrt[4]{1-k^2}$$

будет тоже медиалью. Для нас последнее обстоятельство является очевидным, Евклиду же приходится доказывать его несколько сложным способом. Он последовательно образует пропорции

$$A:B = AB:B^2,$$
$$A:B = C^2:CD = C:D.$$

Отсюда видно, что C с D, так же как и A с B, соизмеримы лишь в степени; затем, поскольку C — медиаль, то D будет тоже медиалью.

Эти две медиали C и D будут искомыми. Действительно,

$$C^2 = a\sqrt{1-k^2}, \quad D^2 = a(1-k^2)\sqrt{1-k^2};$$

их разность

$$C^2 - D^2 = ak^2\sqrt{1-k^2} = k^2\cdot\left(\sqrt{a}\sqrt[4]{1-k^2}\right)^2$$

представляет квадрат на прямой $k\sqrt{a}\sqrt[4]{1-k^2} = kC$, линейно соизмеримой с C.

Второй случай — когда разность квадратов даёт квадрат на прямой, линейно несоизмеримой с большей — оставлен у Евклида без детального разбора. Мы получим все нужные формулы, если возьмём в качестве A и B прямые, удовлетворяющие условиям предложения 30:

$$A = \sqrt{a}, \quad B = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}},$$

$$C = \sqrt{AB} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}},$$

$$D = \frac{B^2}{C} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}} = \frac{B}{\sqrt[4]{1+k^2}}.$$

Медиали C и D и будут искомыми. Действительно,

$$C^2 - D^2 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}} - \frac{a}{(1+k^2)\sqrt{1+k^2}} = \frac{ak^2}{(1+k^2)\sqrt{1+k^2}} = \left(k\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}}\right)^2,$$

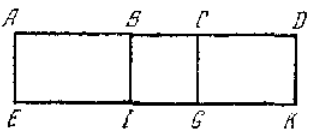
где под знаком квадрата мы получаем прямую, линейно несоизмеримую с $A = \sqrt{a}$.

Схолиаст (Heiberg, т. V, № 212, стр. 510) считает эти медиали «матерями» второй иррациональности первой бимедиали, о которой будет речь в предложении 37. (*И. В.*)

30. Предложение 32. Предложение 32 открывается леммой, помещённой у Гейберга в «Приложении».

Лемма к предложению 32.

Если будут три прямые в каком-нибудь отношении, то будет, что как первая к третьей, так и ⟨прямоугольник⟩ между первой и средней к прямоугольнику между средней и наименьшей (черт. 11).



Черт. 11.

Пусть будут три прямые в каком-нибудь отношении AB, BC, CD; я утверждаю, что будет как AB к CD, так и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC к ⟨прямоугольнику⟩ между BC, CD.

Действительно, проведём AE из точки A под прямым углом к AB и отложим AE, равную BC, и через точку E параллельно прямой AD проведём EK, через точки же B, C, D параллельно AE проведём IB, CG, DK. И поскольку будет, что как AB к BC, так и параллелограмм AI к параллелограмму BG, как же BC к CD, так и BG к CK, то значит, по «равенству» (предложение 22 книги V), как AB к CD, так и параллелограмм AI к параллелограмму CK. И будет AI ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (ибо AE равно BC), CK же — ⟨прямоугольником⟩ между BC, CD (ибо BC равно CG).

Итак, если будут три прямые в каком-нибудь отношении, то будет, что как первая к третьей, так и ⟨прямоугольник⟩ между первой и средней к ⟨прямоугольнику⟩ между средней и третьей; что и требовалось доказать».

Цель предложения 32 заключается в том, чтобы найти две медиальные, соизмеримые только в квадратах линии, дающие медиальное произведение и обладающие тем свойством, что разность их квадратов представляет квадрат линии, соизмеримой или несоизмеримой с большей. По мнению схолиаста (Heiberg, т. V, № 218, стр. 512), обе эти медиали являются матерями второй бимедиали.

Берём три соизмеримые только в квадратах линии

$$A=\sqrt{a},\ B=\sqrt{b},\ C=\sqrt{c},$$

причём $A^2-C^2=a-c$ должно быть соизмеримым с $A^2=(\sqrt{a})^2$. Если положим

$$A^2-C^2=(kA)^2,$$

то отсюда следует, что

$$a-c=k^2a$$

или $1-\frac{c}{a}=k^2$. Значит, $\sqrt{c}=\sqrt{a(1-k^2)}$ (29, X).

Образуем теперь линию D согласно условию

$$D^2 = AB = \sqrt{ab};$$

тогда $D = \sqrt[4]{ab}$ будет медиалью, это наша первая из искомых. Вторую медиаль E мы найдём из условия

$$D \cdot E = B \cdot C,$$

откуда

$$E = \frac{B \cdot C}{D} = \frac{\sqrt{bc}}{\sqrt[4]{ab}} = \sqrt{c}\sqrt[4]{\frac{b}{a}},$$

что тоже будет некоторой медиалью. Евклид доказывает это обстоятельство несколько иначе: он пишет ряд пропорций

$$A \cdot B : B \cdot C = A \cdot C,$$
$$D^2 : D \cdot E = A : C,$$
$$D : E = A : C.$$

Из последнего равенства получается, что D с E (как и A с C) соизмеримы только в квадратах, поскольку же D — медиаль, то и E должно быть медиалью (предложение 23 книги X, следствие).

Затем $D^2 = \sqrt{ab}$, $E^2 = c\sqrt{\frac{b}{a}}$, значит,

$$D^2 - E^2 = \frac{\sqrt{b}\,(a - c)}{\sqrt{a}} = \sqrt{ab}\left(1 - \frac{c}{a}\right) = k^2\sqrt{ab} =$$
$$= (k\sqrt[4]{ab})^2 = (kD)^2.$$

Евклид доказывает это, исходя из пропорции

$$A \cdot C = D \cdot E.$$

Поскольку же $A^2 - C^2 = k^2A^2$, то и $D^2 - E^2 = k^2D^2$ (14, X).

Остаётся лишь показать, что произведение $D \cdot E$ есть медиаль. Это видно из равенства

$$D \cdot E = B \cdot C = \sqrt{bc}.$$

Случай, когда $D^2 - E^2$ представляет квадрат длины, несоизмеримой с D линейно, Евклид детально не рассматривает. Мы можем это сделать, если вместо формулы для C

$$C = \sqrt{a(1 - k^2)},$$

получающейся из 29, X, возьмём соответствующую формулу из 39, X:

$$C = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Интересующие нас медиали будут

$$D = \sqrt[4]{ab},$$

$$E = \frac{B \cdot C}{D} = \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

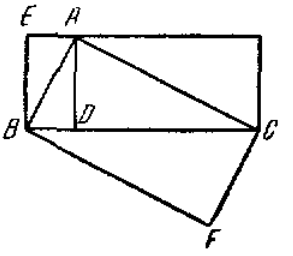
Действительно,

$$D^2 - E^2 = \sqrt{ab}\left(1 - \frac{1}{1+k^2}\right) = \frac{k^2\sqrt{ab}}{1+k^2} =$$

$$= k\left(\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2 = k\left(\frac{D}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2.$$

Стоящее в скобках выражение $\frac{D}{\sqrt{1+k^2}}$ будет соизмеримо с D только в степени. (*И. В.*)

31. Предложение 33. Предложение 33 начинается с леммы, представляющей хорошо известную теорему о том, что перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, является средней пропорциональной между отрезками гипотенузы, а катет — средней пропорциональной между гипотенузой и прилежащим отрезком. Доказательство почти в точности представляет употребляющееся и в современных учебниках и возбуждает только единственный вопрос, почему столь важная теорема фигурирует в качестве простой леммы.



Черт. 12.

В «Приложении» у Гейберга приводится и другое доказательство этой леммы:

«Или и так, если построим прямоугольный параллелограмм EC и дополним AF, то EC будет равен AF; ибо каждый из них будет вдвое больше треугольника ABC. И будет EC ⟨прямоугольником⟩ между BC, AD, а AF — ⟨прямоугольником⟩ между BA, AC. Значит, ⟨прямоугольник⟩ между BC, AD будет равен ⟨прямоугольнику⟩ между BA, AC» (черт. 12).

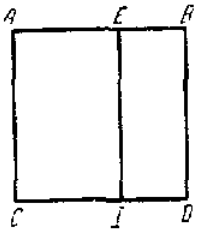
После этого в том же «Приложении» идёт текст второй леммы.

«Лемма к предложению 32.

Если прямая линия рассекается на неравные ⟨части⟩, то будет, что как прямая к прямой, так и ⟨прямоугольник⟩ между целой и большей к ⟨прямоугольнику⟩ между целой и меньшей (черт. 13).

В самом деле, пусть некоторая прямая AB будет рассечена на неравные ⟨части⟩ в E; я утверждаю, что как AE к EB, так и ⟨прямоугольник⟩ между BA, AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BE.

Действительно, начертим на AB квадрат $ACDB$ и через точку E параллельно каждой из AC, BD проведём EI. Теперь ясно, что как AE к EB, так и параллелограмм AI к параллелограмму IB. И будет AI ⟨прямоугольником⟩ между BA, AE (ибо AC равна AB), IB же ⟨прямоугольником⟩ между AB, BE (ибо BD равно AB). Значит, как AE к EB, так и ⟨прямоугольник⟩ между BA, AE к ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BE; что и требовалось доказать.



Черт. 13.

Задача предложения 33 заключается в подготовке построения четвёртой иррациональности — так называемой большей, разбираемой в предложении 39, в формулировке которого действительно упоминаются требования, поставленные в разбираемом предложении. Они заключаются в том, чтобы найти две несоизмеримые даже в квадратах прямые, обладающие тем свойством, что сумма квадратов их рациональна, но произведение представляет медиальный прямоугольник.

Доказательство этого предложения не принадлежит к числу лёгких и поэтому заслуживает более подробного разбора.

Евклид начинает с того, что берёт две соизмеримые только в степени прямые AB, BC такие, что $AB^2 - BC^2$ представляет квадрат некоторой несоизмеримой с AB прямой, иными словами, взятые прямые удовлетворяют требованиям предложения 30. Поэтому мы берём их в той форме, в какой они там получались:

$$AB = \sqrt{a}, \quad BC = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Затем он «прикладывает» к AB с недостатком в виде квадрата прямоугольник, площадь которого равнялась бы квадрату на половине BC. Это значит, что высота x этого прямоугольника должна удовлетворять равенству

$$AB \cdot x = \left(\frac{BC}{2}\right)^2 + x^2.$$

Получающееся квадратное уравнение равносильно требованию разделить AB на такие две части $AE = x$ и $EB = y$, чтобы имели место уравнения

$$x + y = AB,$$
$$xy = \left(\frac{BC}{2}\right)^2.$$

Это значит, что x и y представляют корни квадратного уравнения

$$z^2 - \sqrt{a}\cdot z + \frac{a}{4(1+k^2)} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{\sqrt{a}}{2} + \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{a}{4(1+k^2)}} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2} - \sqrt{\frac{a}{4} - \frac{a}{4(1+k^2)}} = \frac{\sqrt{a}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Опираясь на предложение 18, Евклид утверждает, что x и y будут несоизмеримы между собой (если бы они были соизмеримы между собой, то были бы соизмеримы и со своей суммой $= \sqrt{a}$, но сама форма выражений для x и y показывает, что ни x, ни y не могут быть соизмеримыми с $\sqrt{a}$).

После этого, строя на AB прямоугольный треугольник, вершина I прямого угла которого лежит на перпендикуляре, восставленном из точки E, Евклид получает нужные ему прямые, как катеты AI и IB этого треугольника.

Действительно, эти прямые будут несоизмеримы даже в квадратах (вследствие несоизмеримости x и y):

$$AI^2 = AB\cdot AE = x\sqrt{a}, \quad AI = \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{a};$$

$$BI^2 = AB\cdot EB = y\sqrt{a}, \quad BI = \sqrt{y}\cdot\sqrt[4]{a}.$$

Затем, сумма их квадратов будет рациональна:

$$x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = \sqrt{a}(x+y) = \sqrt{a}\cdot\sqrt{a} = a;$$

произведение же будет медиальным:

$$AI\cdot BI = \sqrt{x}\cdot\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{y}\cdot\sqrt[4]{a} = \sqrt{a}\cdot\sqrt{xy} = AB\cdot\frac{BC}{2};$$

подставляя значения AB и BC, будем иметь:

$$AI\cdot BI = \sqrt{a}\cdot\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{1+k^2}} = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+k^2}},$$

т. е. иррациональной величине. (*И. В.*)

32. Биквадратные уравнения и regula infusa. Евклид в предложении 33 ищет две несоизмеримые в степени прямые такие, что сумма квадратов их рациональна, а произведение представляет медиальную площадь. На алгебраическом языке эта

задача сводится к решению системы уравнений

$$x^2 + y^2 = m,$$
$$xy = \sqrt{n} \quad \text{или} \quad x^2y^2 = n,$$

которая приводится к биквадратному уравнению

$$z^4 - mz^2 + n = 0,$$

имеющему корни

$$z_1 = \sqrt{\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}}, \quad z_2 = \sqrt{\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n}}.$$

Чтобы ближе подойти к обозначениям Евклида, положим.

$$m = a^2, \quad n = \frac{a^2b^2}{4}.$$

Получающееся биквадратное уравнение

$$z^4 - a^2z^2 + \frac{a^2b^2}{4} = 0$$

при помощи подстановки

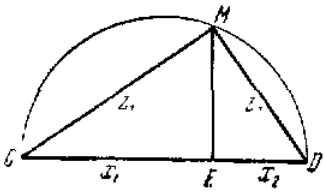
$$z^2 = ax$$

легко приводится к квадратному уравнению

$$x^2 - ax + \frac{b^2}{4} = 0,$$

которое Евклид затем и решает.

Найдя корни x_1 и x_2 этого уравнения, он для определения z_1 и z_2 пользуется графическим приёмом (черт. 14):



Черт. 14.

На прямой $CD = a = x_1 + x_2$ он строит полукруг в точке E, разделяющей CD на отрезки $CE = x_1$ и $ED = x_2$; он восставляет перпендикуляр до пересечения с кругом в точке M; отрезки $CM = z_1$, $MD = z_2$ и будут искомыми.

В этом приведении биквадратного уравнения к квадратному мы видим идею так называемой regula infusa [28]) или метода подстановки, который применяет Абрахам Бен Эзра.

Уравнение

$$\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}x - 4\right) = 20$$

---

[28]) См. примеч. 23.

Эзра разрешает (если ввести современный символический язык алгебры), полагая

$$x - \frac{1}{3}x - 4 = y,$$

что приводит исходное уравнение к более простому

$$y - \frac{1}{4}y = 20,$$

которое уже нетрудно разрешить.

Этот приём имеет большое *методическое* значение в арифметике.

В то время как «фальшивое правило» (regula falsi) сыграло большую роль в истории *необоснованного чисто автоматического решения*, regula infusa имело значение в построении *обоснованных решений*.

Идея состоит в том, что задачи решаются в два или более приёма. Вместо того, чтобы непосредственно определять x, мы определяем y, хорошо сознавая, что, имея y, найдём и x.

Шюкэ [29]) таким приёмом решает не только биквадратное уравнение

$$6x^4 + 24 = 2x^2,$$

но и уравнения

$$12 + 6x^8 = 144x^4,$$
$$243 + 2x^{10} = 487x^5,$$
$$1728x^3 = 512 + 64x^6,$$

приводя их к квадратному.

Впрочем, ещё задолго до Шюкэ уравнения

$$ax^{2n} + bx^n = c,$$
$$ax^{2n} - bx^n + c$$

рассматривались арабским математиком Алькархи.

Подстановкой пользуется и Региомонтан [30]), который уравнение

$$\frac{x}{10-x} + \frac{10-x}{x} = 25$$

сводит к квадратному, полагая $\frac{x}{10-x} = y$, что даёт $y^2 + 1 = 25y$.

---

[29]) Chuquet, Le Triparty en la science des nombres (1484), Bulletino Boncompagni, т. XIII, Roma, 1880.

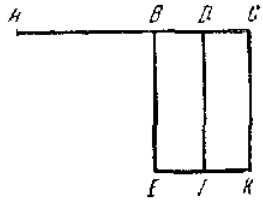
[30]) Regiomontanus, Der Briefwechsel, ed. M. Curtze, Abh. z. Gesch. d. math. Wiss., Bd. 12, Leipzig, 1902.

Более сложная подстановка, понижающая степень возвратного уравнения, а именно $y = x + \frac{1}{x}$, была применена впервые Муавром [31].

33. Предложение 34. Предложение 34 является подготовительным к введению пятой иррациональности в предложении 40. Оно вводится следующей леммой, помещённой у Гейберга в Приложении.

Лемма.

Если будут две неравные прямые, и меньшая из них рассечена на равные ⟨части⟩, то прямоугольник между двумя прямыми будет вдвое больше ⟨прямоугольника⟩ на большей и половине меньшей.



Черт. 15.

Пусть будут две неравные прямые AB и BC, из которых большей пусть будет AB, и пусть BC будет рассечена пополам в D; я утверждаю, что ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC вдвое больше ⟨прямоугольника⟩ между AB, BD (черт. 15).

Действительно, проведём из точки B под прямыми углами к BC ⟨прямую⟩ BE и отложим BE, равную BA, и достроим чертёж. Поскольку теперь будет, что как DB к DC, так и BI к DK, то значит, «присоединяя (предложение 18 книги V) — как BC к DC, так и BK к DK; BC же вдвое больше DC, значит, и BK будет вдвое больше DK. И будет BK ⟨прямоугольником⟩ между AB, BC (ибо AB равно BE), DK же — ⟨прямоугольником⟩ между AB, BD (ибо DC равно BD, DI же ⟨равно⟩ AB); что и требовалось доказать».

В предложении 34 решается задача — отыскать такие две несоизмеримые в квадратах прямые, которые дают сумму квадратов в виде медиальной площади, но произведение рациональное.

Евклид берёт две соизмеримые только в степени медиали AB, BC, произведение которых рационально, но разность квадратов $AB^2 - BC^2$ равна квадрату прямой линии, несоизмеримой с AB. Так как этим условиям удовлетворяет вторая половина предложения 31, то искомые прямые можно взять в том виде, как они там даны, а именно:

$$AB = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}}, \quad BC = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{1+k^2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}}.$$

---

[31] Moivre, Miscellanea analytica, London, 1730. — Lagrange, Reflexions sur la résolution algébrique des équations (Oeuvres, Paris, 1869, т. III, стр. 205).

Затем к AB «прикладывается» с недостатком в виде квадрата прямоугольник, площадь которого равна квадрату половины BC. Обозначив через x высоту этого прямоугольника, будем иметь:

$$AB \cdot x = \frac{BC^2}{4} + x^2.$$

Полученное квадратное уравнение равносильно делению AB на такие части $AI = x$ и $IB = y$, чтобы удовлетворялись уравнения

$$x + y = AB = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}},$$

$$xy = \frac{BC^2}{4} = \frac{a}{4(1+k^2)} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Решая эти уравнения, находим:

$$x = \frac{AB}{2} + \sqrt{\frac{AB^2}{4} - \frac{BC^2}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt[4]{1+k^2}}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right),$$

$$y = \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt[4]{1+k^2}}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Аналогично предыдущему предложению доказываем, что x и y являются несоизмеримыми.

После этого при помощи того же построения, что и в предложении 33, определяем искомые прямые:

$$AD = \sqrt{AB \cdot AI}, \quad BD = \sqrt{AB \cdot BI},$$

которые, вследствие несоизмеримости $x = AI$ и $y = IB$, будут несоизмеримы даже в квадратах. Таким образом, первое требование выполнено.

Второе требование заключается в том, что сумма квадратов искомых прямых должна быть медиальной; оно выполняется:

$$AD^2 + BD^2 = AB \cdot AI + AB \cdot IB = AB^2 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Наконец, последнее требование состоит в том, чтобы произведение их было рациональным; оно тоже выполняется:

$$AD \cdot DB = AB \cdot \sqrt{AI \cdot BI} = AB \cdot \frac{BC}{2} = \frac{a}{2(1+k^2)}.$$

(*И. В.*)

34. Предложение 35. Предложение 35 является подготовительным к последней — 6-й иррациональности, рассматриваемой в предложении 41. Это предложение, опирающееся на предложение 32 книги X, состоит в следующем:

«Найти два несоизмеримых в квадрате отрезка, сумма квадратов которых и произведение были бы медиальными и между собой несоизмеримыми».

В предложении 32 были найдены две медиали AB и BC, удовлетворяющие условиям, что их произведение медиально, а разность квадратов представляет квадрат на прямой, несоизмеримой с большей медиалью AB. Интересующие нас медиали будут иметь такое выражение:

$$AB = D = \sqrt[4]{ab},$$

$$BC = E = \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{1+k^2}},$$

где a, b — два целых числа, произведение которых не представляет квадрата.

Теперь к AB «прикладывается» с недостатком в виде квадрата прямоугольник с площадью, равной квадрату половины BC, что равносильно решению системы уравнений

$$x + y = D = \sqrt[4]{ab},$$

$$xy = \frac{E^2}{4} = \frac{\sqrt{ab}}{4(1+k^2)}.$$

Корни этих уравнений будут:

$$x = \frac{\sqrt[4]{ab}}{2} + \sqrt{\frac{\sqrt{ab}}{4} - \frac{\sqrt{ab}}{4(1+k^2)}} = \frac{\sqrt[4]{ab}}{2}\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right),$$

$$y = \frac{\sqrt[4]{ab}}{2}\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Получающиеся прямые $x = AI$ и $y = IB$ будут несоизмеримыми (18, X).

Восставив в точке деления I перпендикуляр до пересечения с описанной на AB полуокружностью в точке D, Евклид определяет нужные ему величины как катеты полученного треугольника AD и DB:

$$AD = \sqrt{AB \cdot AI} = \sqrt[4]{ab}\,\frac{\sqrt{k+\sqrt{1+k^2}}}{\sqrt[4]{4(1+k^2)}},$$

$$DB = \sqrt{AB \cdot IB} = \sqrt[4]{ab} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}}{\sqrt[4]{4(1+k^2)}}.$$

Вследствие несоизмеримости $AI = x$ и $IB = y$ эти отрезки будут несоизмеримы даже в квадратах (первое требование).

Поскольку $AD^2+DB^2=AB^2=\sqrt{ab}$, т. е. медиальной площади, то будет выполнено и второе требование.

Третье требование состоит в том, что произведение $AD\cdot DB$ должно быть медиальным. Действительно, оно будет равно:

$$AD\cdot DB=\frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{1+k^2}}.$$

Евклид доказывает это так. Имеем

$$AI\cdot IB=xy-ID^2,$$

$$xy=\frac{BC^2}{4}-BF^2,$$

откуда

$$BC=2\cdot ID,$$

$$AB\cdot BC=2\cdot AB\cdot ID.$$

Поскольку же $AB\cdot BC$ есть медиальная площадь, то значит, и $AB\cdot ID$ будет медиальной. Но

$$AB\cdot ID=AB\sqrt{AI\cdot IB}=\sqrt{AB\cdot AI}\cdot\sqrt{AB\cdot IB}=AD\cdot DB;$$

значит, и $AD\cdot DB$ будет медиальной площадью, т. е. третье требование выполнено.

Остаётся удовлетворить четвёртому требованию: чтобы сумма квадратов $AD^2+DB^2=\sqrt{ab}$ и произведение $AD\cdot DB=\frac{\sqrt{ab}}{2\sqrt{1+k^2}}$ были несоизмеримы. В нашем обозначении это является очевидным; Евклиду же приходится доказывать так:

Вследствие линейной несоизмеримости AB с BC квадрат на AB, равный сумме AD^2+DB^2, будет линейно несоизмерим с прямоугольником $AB\cdot\frac{BC}{2}$ или $AB\cdot ID$, который, как доказано выше, равен прямоугольнику $AD\cdot DB$.

Античные схолиасты считают, что предложения 29 и 30 являются подготовительными к 36, а следующие за ними 31—35 — подготовительными к 37—41. Это безусловно верно для 33—35 и 39—41, возможно для 31, 32 и 37, 38 и несколько сомнительно для 29, 30 и 36. Если рассматривать структуру доказательств, то более вероятным будет предположение, что 29, 30, а затем 31 и 32 являются подготовительными для 33, затем 34 и 35, а эти последние, в свою очередь, подготавливают предложения 39, 40 и 41. (*И. В.*).

35. Первая гексада иррациональностей. После ознакомления с прямыми, рациональными, соизмеримыми только в степени (т. е., с нашей точки зрения, иррациональными вида $\sqrt{a}$), и медиальными, получающимися от взятия среднего геометрического

от двух соизмеримых только в степени, по формуле $\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} = \sqrt[4]{ab} = \sqrt[4]{A}$, Евклид вводит ещё шесть новых иррациональностей, разбираемых в предложениях 36—41.

В предложении 36 вводится иррациональность вида

$$\sqrt{a} + \sqrt{b},$$

так называемая биномиаль. Иррациональность соответствующей прямой Евклид доказывает так:

Мы имеем прямые

$$AB = \sqrt{a},\ BC = \sqrt{b} \text{ и } AC = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

из которых две первые соизмеримы только в квадратах. Так как

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AB \cdot BC}{BC^2} \text{ или } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b},$$

то $AB \cdot BC = \sqrt{ab}$ не будет соизмеримым с $BC^2 = b$, а равно и с $AB^2 + BC^2 = a + b$. Отсюда следует, что

$$AC^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$$

будет несоизмеримо с $a + b$ и, значит, $AC = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ не будет рациональной величиной, соизмеримой с $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ хотя бы в квадратах.

В «Приложении» Гейберг приводит ещё такое окончание этого предложения, которое он считает не принадлежащим Евклиду:

«Назвал же он её «из двух имён» (ἐκ δύο ὀνομάτων) вследствие того, что она складывается из двух рациональных (ῥητῶν = «называемых» или именуемых»), разумно называя рациональную «именем», поскольку она «именуема» (καθ' ὃ ῥητόν)».

Это окончание показывает, что укоренившееся название «биномиаль», т. е. двучленная иррациональность, не совсем соответствует греческому термину; правильнее было бы считать, что «биномиаль» = двухимённая иррациональность.

В предложениях 37 и 38 вводятся бимедиали — иррациональности, получаемые от сложения двух медиалей. Из них рассматриваемая в предложении 37 *первая бимедиаль* получается в результате сложения двух медиалей, произведение которых рационально. Согласно предложению 31 полученные медиали будут иметь вид

$$AB = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{k},\quad BC = \sqrt{a} \cdot \sqrt[4]{k^3}.$$

Их сумма

$$AC = \sqrt{a}\,(\sqrt[4]{k} + \sqrt[4]{k^3})$$

не будет соизмеримой хотя бы в квадрате с AB или BC. Действительно,

$$AC^2 = a\left(\sqrt[4]{k^2} + \sqrt[4]{k^6} + 2\sqrt[4]{k^4}\right) = a\left\{2k + (1+k)\sqrt[4]{k^2}\right\}$$

не будет соизмерима ни с $AB = \sqrt{a}\,\sqrt[4]{k}$, ни с $BC = \sqrt{a}\,\sqrt[4]{k^3}$ хотя бы и в квадратах.

Доказательство Евклида развивается аналогично предыдущему предложению.

В «Приложении» у Гейберга дано следующее окончание этого предложения:

«Назвал же он ее из двух средних первой. ⟨=первой бимедиалью⟩ вследствие того, что ⟨составные её части⟩ заключают рациональную ⟨площадь⟩, рациональная же является первичной».

В предложении 38 вводится *вторая бимедиаль*, получающаяся из суммы двух медиалей, произведение которых не рационально, но медиально, т. е. имеет вид $\sqrt{ab}$.

Удовлетворяющие этому условию медиали имеют вид

$$AB = \sqrt[4]{a}, \quad BC = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Требуется доказать, что сумма их

$$AC = \sqrt[4]{a}\,(1+\sqrt{b})$$

будет иррациональной.

При нашем способе обозначения это доказательство получается сразу:

$$AC^2 = \sqrt{a}\,(1+b+2\sqrt{b})$$

даже в квадратах не будет соизмеримо ни с $AB = \sqrt[4]{a}$, ни с $BC = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{b}$.

Доказательство Евклида развивается так:

К рациональной прямой $DE = \rho$ он прикладывает площадь, равную квадрату AC; получающаяся «ширина»

$$DH = \frac{AC^2}{DE} = \sqrt{a}\,\frac{(1+b+2\sqrt{b})}{\rho}$$

разбивается на две прямые

$$DG = \frac{1+b}{\rho}\sqrt{a} \quad \text{и} \quad \frac{2\sqrt{a}\,\sqrt{b}}{\rho} = GH,$$

каждая из которых будет рациональной и соизмеримой с $DE = \rho$ только в квадрате (предложение 22 книги X); между собой они соизмеримы только в квадратах; значит, согласно предложению 36, их сумма DH будет первой иррациональностью или биномиалью.

Умножив DH на $DE = \rho$, мы получим иррациональную площадь

$$(1+b)\sqrt{a}+2\sqrt{ab}=AC^2,$$

квадратный корень из которой и даст нам третью иррациональность, так называемую вторую бимедиаль

$$AC=\sqrt[4]{a}(1+\sqrt{b}).$$

При $b=a$ рассматриваемая иррациональность обращается в первую бимедиаль.

В «Приложении» у Гейберга приведено следующее окончание этого предложения:

Назвал же он её «из двух средних второй» вследствие того, что ⟨прямоугольник⟩ между ними заключает медиальную и нерациональную ⟨площадь⟩, медиаль же будет вторичной после рациональной. А что заключённое между рациональной и иррациональным будет иррациональным, ясно. Действительно, если бы оно было рациональным и было бы приложено к рациональной, то и другая его сторона была бы рациональной. Но она и иррациональна; что нелепо. Значит, ⟨заключённое⟩ между рациональной и иррациональным будет иррациональным».

Начиная с предложения 39, мы встречаемся с новым типом иррациональных прямых, получающихся сложением. До сих пор складывались прямые, соизмеримые между собой в квадратах, что дало нам следующие иррациональности:

биномиаль	$\sqrt{a}+\sqrt{b}$,
первая бимедиаль	$\sqrt[4]{a}+k\sqrt{a}\sqrt[4]{a}$,
вторая бимедиаль	$\sqrt[4]{a}+k\sqrt{b}\sqrt[4]{a}$.

Теперь мы будем рассматривать иррациональности, получающиеся от сложения прямых, несоизмеримых даже в квадрате.

В предложении 39 рассматривается иррациональность, полученная в результате сложения двух несоизмеримых в квадрате прямых, сумма квадратов которых рациональна, а произведение медиально. Соответствующие прямые, согласно предложению 33, будут иметь вид

$$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{x},\quad \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{y},$$

где x и y будут корнями квадратного уравнения

$$z^2-\sqrt{a}\cdot z+\frac{a}{4(1+k^2)}=0,$$

т. е.

$$x=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right),\quad y=\frac{\sqrt{a}}{2}\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Интересующие нас прямые будут иметь вид

$$AB = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{x} = \sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}},$$

$$BC = \sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{y} = \sqrt{\frac{a}{2}}\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Квадрат суммы этих прямых будет:

$$AC^2 = \frac{a}{2}\left(2+2\sqrt{\left(1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)\left(1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}\right) =$$

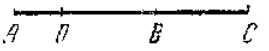
$$= a\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Удвоенное произведение $AB\cdot BC$, равное $\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}$, будет медиальным и несоизмеримым с суммой $AB^2+BC^2=a$; значит, AC^2 будет иррациональным; значит, и подавно AC будет иррациональным

$$AC = \sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right).$$

В «Приложении» у Гейберга предложение 39 заканчивается так:

«Назвал же он её «бо́льшей», вследствие того, что рациональные ⟨квадраты⟩ на AB, BC ⟨вместе⟩ будут больше медиального дважды ⟨прямоугольника⟩ между AB, BC, и название должно ⟨быть⟩ установлено в зависимости от свойства рациональных. А что ⟨квадраты⟩ на AB, BC, ⟨вместе взятые⟩, больше удвоенного ⟨прямоугольника⟩ между AB, BC, должно доказать так (черт. 16).



Черт. 16.

Очевидно теперь, что AB, BC будут неравными. Действительно, если бы они были равными, то и ⟨квадраты⟩ на AB, BC были бы равны дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC, и был бы рациональным и ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC; этого же не предполагается, значит, AB, BC будут неравными. Предположим, что AB больше, и отложим BD равным BC, значит, ⟨квадраты⟩ на AB, BD равны дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BD и ⟨квадрату⟩ на DA (предложение 7 книги II). DB равно BC;

значит, ⟨квадраты⟩ на AB, BC равны дважды ⟨прямоугольнику⟩ между AB, BC и ⟨квадрату⟩ на AD; так что ⟨квадраты⟩ на AB, BC будут больше дважды ⟨прямоугольника⟩ между AB, BC на ⟨величину, равную квадрату⟩ на AD. Используемое равенство

$$AB^2 + BD^2 = 2AB \cdot BD + AD^2$$

легко доказывается разложением $AB^2 = (AD - DB)^2$:

$$\begin{aligned} AB^2 + BD^2 &= AD^2 + 2AD \cdot BD + BD^2 + BD^2 = \\ &= AD^2 + 2(AD \cdot BD + BD^2) = \\ &= AD^2 + 2BD(AD + BD) = \\ &= AD^2 + 2AB \cdot BD. \end{aligned}$$

В предложении 40 рассматривается сложение несоизмеримых в квадрате прямых, у которых, наоборот, произведение будет рациональным, а сумма квадратов медиальной.

Удовлетворяющие этому условию прямые получены в предложении 34; это будут прямые вида

$$AB = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}}} \cdot \sqrt{x}, \quad BC = \sqrt{\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}}} \cdot \sqrt{y},$$

где x и y будут корнями уравнения

$$z^2 - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{1+k^2}} \cdot z + \frac{a}{4(1+k^2)^{3/2}} = 0.$$

Окончательно:

$$AB = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{1+k^2}} \sqrt{1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}},$$

$$BC = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{2} \sqrt[4]{1+k^2}} \sqrt{1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}.$$

Квадрат суммы этих прямых будет:

$$AC^2 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}} \left(1 + \sqrt{\left(1 + \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)\left(1 - \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)}\right) = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Сумма квадратов $AB^2 + BC^2 = \frac{a}{\sqrt{1+k^2}}$ медиальна, а удвоенное произведение $2AB \cdot BC = \frac{a}{1+k^2}$ рационально; значит, их сумма AC^2 будет иррациональна, так же как и её квадратный корень AC.

В «Приложении» у Гейберга эта теорема заканчивается так: «Рационально и медиально квадрирующей называется она вследствие того, что квадрирует две площади — одну рациональную, другую же медиальную, и вследствие превосходства рационального он назвал его первым».

Наконец, в предложении 41 Евклид разобрал случай, когда и сумма квадратов и произведение являются одновременно медиальными.

Обладающие этим свойством прямые определены в предложении 35; они имеют вид

$$AB = \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k},$$

$$BC = \frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}}\cdot\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}.$$

Квадрат их суммы будет:

$$AC^2 = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1+k^2}}(\sqrt{1+k^2}+1).$$

Доказательство иррациональности этого выражения Евклид проводит так.

Возьмем рациональную прямую $DE = \rho$ и построим выражение

$$\frac{AC^2}{DE} = \frac{\sqrt{ab}}{\rho} + \frac{\sqrt{ab}}{\rho\sqrt{1+k^2}}.$$

Так как площадь $DI = AB^2 + BC^2 = \sqrt{ab}$ медиальна, то

$$DH = \frac{\sqrt{ab}}{\rho}$$

будет несоизмерима с DE линейно.

Точно так же докажем, что и

$$HK = \frac{\sqrt{ab}}{\rho\sqrt{1+k^2}}$$

будет несоизмерима с DE линейно.

Теперь, вследствие несоизмеримости $\sqrt{ab}$ и $\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1+k^2}}$, будут несоизмеримы DH и HK, так как они соизмеримы только

в степени, то (36, X) их сумма DK будет иррациональной, а именно биномиалью:

$$DK = \frac{\sqrt{ab}}{\rho} + \frac{\sqrt{ab}}{\rho\sqrt{1+k^2}};$$

значит, будет иррациональным и произведение $DK \cdot DE = \sqrt{ab} + \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1+k^2}}$ и тем более квадратный корень из этого выражения

$$\sqrt[4]{ab}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}},$$

который и даёт нам шестую иррациональность — бимедиально-квадрирующую.

В «Приложении» у Гейберга эта теорема заканчивается так: «Называет же он её «бимедиально-квадрирующей» вследствие того, что она квадрирует две медиальные площади, а именно составленное из ⟨квадратов⟩ на AB, BC и дважды ⟨прямоугольник⟩ между AB, BC».

Случай, когда и сумма квадратов AB и BC и их произведение $AB \cdot BC$ будут одновременно рациональными, не представляет интереса, так как приводит или к рациональной, соизмеримой линейно или в степени, или, в крайнем случае, к биномиальной прямой.

Лежащая в основе евклидовской классификации идея совершенно ясна: *иррациональности классифицируются в зависимости от того, какую форму получает квадрат суммы.*

Если заданная, получающаяся в результате сложения иррациональность будет $A+B$, её квадрат

$$(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB.$$

Сначала Евклид рассматривает случай, когда A и B соизмеримы в степени; тогда A и B могут быть или обе рационалями (в смысле Евклида), или обе медиалями. В первом случае мы получаем биномиаль, во втором — две бимедиали в зависимости от того, будет ли произведение $A \cdot B$ рациональным или медиальным (сумма квадратов A^2+B^2 при соизмеримых в степени A, B будет всегда рациональной в смысле Евклида).

Затем Евклид переходит к рассмотрению несоизмеримых A и B, различая опять три случая:

1) A^2+B^2 рационально, AB медиально: «бо́льшая» иррациональность;

2) A^2+B^2 медиально, AB рационально: рационально- и медиально-квадрирующая;

3) A^2+B^2 медиально, AB медиально: бимедиально-квадрирующая. (*И. В.*)

36. Относительный минимум. В лемме за предложением 41 Евклид доказывает, что если

$$x+y=u+v=a,$$

где $x>y$, $u\geq v$, то при $x>u$ имеем: $x^2+y^2>u^2+v^2$.

Отсюда вытекает, что наименьшее значение суммы

$$x^2+y^2$$

будет при

$$x=y=\frac{a}{2}.$$

Эту задачу об *относительном минимуме* обычно сводят, как и другие, аналогичные, к хорошо известной задаче о *максимуме* xy при $x+y=a$ или, что то же, о максимуме функции $x(a-x)$, который будет при $x=y=\frac{a}{2}$.

Для этого следует только заметить, что в силу равенства

$$x^2+y^2=a^2-2xy$$

минимуму x^2+y^2 будет отвечать *максимум* $2xy$ и, следовательно, xy.

Отчасти по этому пути идёт и Евклид, который доказывает, что, при поставленных условиях,

$$xy<uv, \tag{1}$$

откуда и заключает, что

$$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=a^2-2xy>(u+v)^2-2uv=a^2-2uv.$$

Что же касается неравенства (1), то оно у Евклида доказывается довольно сложно.

В основу кладётся предложение 5, II, дающее в алгебраической символике:

$$xy+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4},$$

$$uv+\left(\frac{a}{2}-v\right)^2=\frac{a^2}{4},$$

откуда

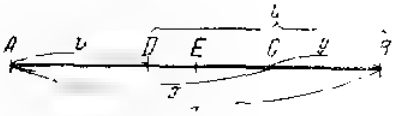
$$xy+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=uv+\left(\frac{a}{2}-v\right)^2.$$

Чтобы отсюда получить (1), следует убедиться, что

$$\frac{a}{2}-v<x-\frac{a}{2}.$$

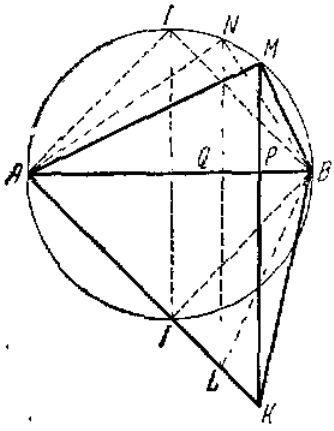
Чисто алгебраическое изложение вывода неравенства *сильно искажает мысль Евклида.*

Рассматривая x, y, u, v как отрезки, на которые делится AB, Евклид исследует $x - \frac{a}{2} = EC$ и $\frac{a}{2} - v = DE$ (черт. 17). То,



Черт. 17.

что $DE < EC$, он выводит из соотношений $AE = EB$ и $AC > DB$ т. е. C и D оказываются на неравных расстояниях от середины E, но если $AD > CB$, $DE < EC$.



Черт. 18.

Неравенство $xy > uv$ при $x + y = u + v = a$ можно было бы вывести, как уже было замечено в комментарии к планиметрическим книгам, из того, что перпендикуляр к диаметру до пересечения с окружностью тем больше, чем ближе его основание к центру *).

Лемма же Евклида вытекает из построения, для которого я даю только чертёж (черт. 18), предлагая в нём разобраться читателю. Всё сводится к тому, что наклонная $BK > BL$, как имеющая основание, более удалённое от основания перпендикуляра I.

37. Неравенство Коши [32]. Евклид, доказывая при условии

$$x > u,\ x + y = u + v = a$$

неравенство

$$x^2 + y^2 > u^2 + v^2,$$

использует предложение 5 книги II, приводящееся к тождеству

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

---

*) См. комментарий 28 к VI книге.

[32]) Cauchy, Analyse algébrique, Paris 1821. — **Маракуев**, Элементарная алгебра, М., 1903, т. I, гл. 10.

Из этого тождества он получает:

$$xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

$$2xy < 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Затем, обращаясь к предложению 9 той же книги, он получает

$$\frac{x^2+y^2}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2, \quad x^2+y^2 > 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

и тогда из (1) заключает, что

$$x^2+y^2 > 2xy. \qquad (2)$$

Сравним этот сложный путь с тем простым, по которому пошли бы мы:

$$(x-y)^2 > 0,$$

т. е.

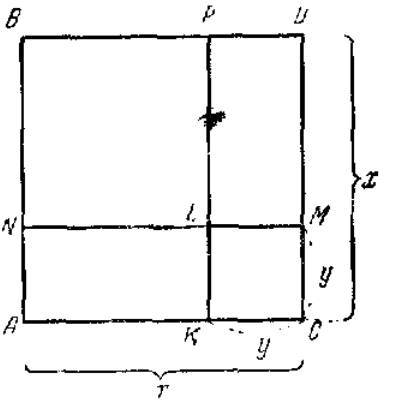
$$x^2+y^2-2xy > 0;$$

следовательно,

$$x^2+y^2 > 2xy.$$

Но это вместе с тем тот путь, по которому Евклид не мог пойти.

Неравенство $A > 0$ *могло иметь* смысл лишь в том случае, если бы наряду с ним имели место соотношения $A = 0$ и $A < 0$, но это предполагает существование величины *нуль* и *отрицательных* величин, чего у Евклида не было.



Черт. 19.

Но он мог бы непосредственно, не используя предложений II книги, вывести своё неравенство (2) из конфигураций, *аналогичных тем*, которыми пользуется II книга.

Для этого он должен был бы взять квадрат $ABCD$, построенный на x, и в нём квадрат $CKLM$, построенный на y (черт. 19).

Тогда

$$ANCM = xy = CKDP.$$

Но

$$x^2 = ABCD = ANCM + LMDP + LNBP.$$

Прибавляя $y^2 = CKML$, получаем

$$x^2+y^2 = 2xy + LNBP,$$

откуда и вытекает неравенство (2) Евклида.

Такое доказательство, конечно, совершенно в *духе Евклида*.

Прикладывая к обеим частям неравенства Евклида сумму x^2+y^2, можно привести его к виду

$$\frac{x^2+y^2}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^2, \tag{3}$$

а отсюда, используя принцип полной индукции, можно получить неравенство

$$\frac{x^n+y^n}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n. \tag{4}$$

Конечно, с точки зрения Евклида, такое неравенство может иметь смысл только для $n=3$. Путь к нему сам Евклид мог бы найти только через стереометрические аналогоны II книги, которых нет не только у него, но и у последующих античных математиков.

Если площади квадратов обозначить через a и b и стороны через $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, то будем иметь:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \tag{5}$$

т. е. так называемое *среднеарифметическое всегда больше среднегеометрического*.

Неравенство (4) обобщается Коши:

$$\left(\frac{a+b+\ldots+h}{p}\right)^k < \frac{a^k+b^k+\ldots+h^k}{p}. \tag{6}$$

Неравенство (5) — тоже частный случай общей теоремы Коши: *среднеарифметическое положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_p$, которые не все равны между собой, больше их среднегеометрического*:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_p}{p} > \sqrt[p]{a_1a_2\ldots a_p}. \tag{7}$$

Из $\sqrt{a_1a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}$, замечая, что

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} = \sqrt{\sqrt{a_1a_2}\sqrt{a_3a_4}},$$

выводим, что

$$\sqrt[4]{a_1a_2a_3a_4} < \frac{\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_3a_4}}{2} < \frac{\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_3+a_4}{2}}{2} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4}.$$

Таким образом двигаемся дальше.

Для *строгого* обоснования необходимо применить принцип полной математической индукции: если положение доказано для $n=2$ и, будучи верным для n, остаётся верным и для $n+1$, то оно верно для всех значений, начиная с $n=2$.

38. Единственность разложения и вторая гексада иррациональностей. 1. Шесть предложений 42 — 47 имеют своей целью доказать, что введённые в предложения 36 — 41 иррациональности могут быть разложены на составные части лишь единственным образом.

Предложения 42, 43, 45, 46, в которых сумма квадратов составных частей и удвоенное их произведение принадлежат к разным типам (если одна рациональна, то другое медиально, и наоборот), доказываются по одному методу.

Пусть

$$x+y=u+v.$$

Тогда

$$x^2+y^2+2xy=u^2+v^2+2uv,$$
$$(x^2+y^2)-(u^2+v^2)=2uv-2xy.$$

Если в одной части стоят рациональные площади, то их разность будет тоже рациональна и, следовательно, не может быть (по 26, X) разностью стоящих в другой части медиальных площадей, что и доказывает предложение.

При доказательстве предложений 44 и 47, где и сумма квадратов и удвоенное произведение будут одного типа, а именно оба медиальны, доказательство несколько усложняется. Евклид прикладывает все площади к рациональной прямой $EI=d$; в таком случае, согласно предложению 22, другие стороны получающихся прямоугольников будут рациональными, соизмеримыми только в степени прямыми

$$\frac{x^2+y^2}{d}+\frac{2xy}{d}=\frac{u^2+v^2}{d}+\frac{2uv}{d}.$$

Выражения, стоящие справа и слева, представляют две равные биномиали, биномиали же, согласно предложению 42, делятся только в одной точке, откуда вытекает

$$x^2+y^2=u^2+v^2,$$
$$2xy=2uv,$$

а следовательно, и

$$x=u,\quad y=v,$$

что и доказывает предложенное. При этом доказанная перед предложением 41 лемма позволяет утверждать, что разложения $x+y$ и $u+v$ не представляют одного и того же разложения с переставленными членами. (*И. В.*)

2. Ко второму ряду определений древний схолиаст делает примечание (Heiberg, т. V, № 290, стр. 534),

«Пятая глава, в которой он обнаружил шестикратное разнообразие биномиали, которая является первой ⟨иррациональностью, полученной⟩ при помощи сложения» (четвёртой главой, повидимому, была не отмеченная специально серия предложений 36 — 47).

В «Приложении» Гейберг приводит следующее окончание текста «вторых определений».

«Теперь из существующих шести рассматриваемых таким образом прямых он помещает первыми в ряду три, для которых бо́льшая ⟨рациональ⟩ в квадратах будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, вторыми же — остальные три, для которых — на ⟨квадрат⟩ на несоизмеримой, вследствие того, что соизмеримость первенствует над несоизмеримостью, и далее первую, для которой бо́льшая рациональ будет соизмерима с отложенной рациональной ⟨прямой⟩, вторую же, — для которой меньшая, опять вследствие того, что большее первенствует над меньшим тем, что оно ⟨его⟩ содержит в себе, третью же, — для которой ни одна из рациональей не будет соизмерима с отложенной рациональной прямой. И относительно следующих трёх подобным же образом — первую упомянутого второго ряда называя четвёртой, вторую — пятой и третью — шестой». (*И. В.*)

39. Алгебраическая форма евклидовых иррациональностей. Нессельман[33]), а за ним Ващенко-Захарченко[34]) выражают *алгебраическими* формулами евклидовы иррациональности. При этом *под буквами* разумеются *рациональные числа* и формулами определяются не иррациональные величины, а определяющие их *иррациональные числа*, которых у Евклида *нет*. Но, конечно, евклидовы геометрические доказательства при *арифметизации геометрии* дают свойства иррациональных чисел, выражаемых квадратными радикалами.

Для медиали Нессельман даёт две формулы

$$\sqrt{a\sqrt{b}} \text{ и } \sqrt[4]{ab}.$$

Если a и b — *прямые*, то, конечно, ни первая, ни вторая формы не имеют смысла.

Вторая форма имеет ещё тот недостаток, что при замене $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}$ через $\sqrt{ab}$ и дальше $\sqrt{\sqrt{ab}}$ через $\sqrt[4]{ab}$ она даёт не ту форму, которая непосредственно отвечает иррациональности Евклида, а ту, которая получается только после ряда *алгебраических преобразований*.

Струик[35]) идёт ещё дальше. У него средняя берется в форме $\sqrt[4]{a}$.

---

[33]) Nesselman, Die Algebra der Griechen, Berlin, 1842.

[34]) М. Е. Ващенко-Захарченко, Начала Евклида, Киев 1880.

[35]) Enriques, Gli Elementi d'Euclide e la critica antica e moderna, Bologna, 1925 — 1932 (X книга Евклида).

В других случаях Струик отличает *числа*, означаемые *латинскими* буквами, от *геометрических величин*, означаемых *греческими*.

Но что такое α? Это какая-то уже четырёхмерная величина.

Хизс[36]) строго различает прямые, означая их малыми латинскими буквами, от площадей, означаемых большими.

Медиали у него $\sqrt{a}\sqrt{B}$, $\sqrt{\frac{B\sqrt{B}}{a}}$.

Эти формы приемлемы.

Но хуже формы $\sqrt[4]{AB}$, $\sqrt{\frac{B\sqrt{B}}{\sqrt{A}}}$; о них следует повторять то, что я сказал выше о формах Нессельмана.

Я нахожу единственной правильной алгебраической формой медиальной прямой форму

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}},$$

а для площади — форму $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$. Здесь греческие буквы α и β означают всегда *площади*, например квадраты, построенные на прямых $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$ — сторонах этих квадратов. $\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}$ — это сторона квадрата, равновеликого (по Евклиду, равного) прямоугольнику между $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$.

Можно писать $\sqrt{\sqrt{\alpha\beta}}$, но это уже не было бы *непосредственное* выражение сущности евклидовой иррациональности, а вывод из свойства $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}$, самим Евклидом используемый в X книге.

40. Определения иррациональностей. Евклид оперирует над 13 иррациональностями, которым мы даём следующие обозначения:

1) Средняя (или медиаль).
2) Биномиаль.
3) Первая бимедиаль.
4) Вторая бимедиаль.
5) Бо́льшая (иррациональная).
6) Рационально- и медиально-квадрирующая.
7) Бимедиально-квадрирующая.
8) Вычет (или апотома).
9) Первый медиальный вычет.
10) Второй медиальный вычет.
11) Меньшая (иррациональная).

---

[36]) T. L. Heath, The thirteen Books of Euclid's Elements, vol. III, Cambridge, 1926.

12) Образующая с рациональным целое медиальное.

13) Образующая с медиальным целое медиальное.

При этом ещё различают 6 биномиалей и 6 вычетов.

Для определения иррациональности Евклид доказывает, что определяемая величина в действительности иррациональна. Затем он даёт *построение* иррациональности, т. е. доказывает их существование в том смысле, как это было указано в комментарии к I книге «Начал».

Что такое *средняя* прямая (или *медиаль*)?

На языке Евклида, это — прямая, квадрат на которой равен прямоугольнику между двумя рациональными (в смысле Евклида), соизмеримыми только в степени (Евклид доказывает, что такой *прямоугольник иррационален*).

Биномиаль состоит из двух рациональных (в смысле Евклида), но линейно несоизмеримых. Если вводятся в алгебраические формы, как у Хизса, символы рациональных чисел, то $(1+k)\sqrt{\alpha}$ уже не *биномиаль*, а *рациональная*.

Вычет отличается от биномиали только тем, что берётся *разность* вместо *суммы*.

Тогда $(1-k)\sqrt{\alpha}$ не вычет, а рациональная.

В *бимедиали* и в *медиальном* вычете мы складываем и вычитаем средние (или медиали), но опять несоизмеримые линейно, причём Евклид отличает два рода: один — когда прямоугольник между членами рациональный, второй — когда он медиальный.

Следует иметь в виду, что Евклид говорит не только о медиальных *прямых*, но и о медиальных *площадях*. Это площади, которые квадрирует медиальная прямая, т. е. равные квадрату на медиальной прямой, т. е. прямоугольнику между двумя рациональными (в евклидовом смысле) прямыми.

Составными иррациональными являются также:

I. Бо́льшая и меньшая.

II. Рационально- и медиально-квадрирующая и образующая с рациональным целое медиальное.

III. Бимедиально-квадрирующая и образующая с медиальным целое медиальное.

Все они состоят из суммы и разности двух несоизмеримых в степени, причём:

для I сумма квадратов рациональная, а прямоугольник между членами медиальный;

для II, наоборот, сумма квадратов медиальная, а прямоугольник рациональный;

для III и сумма квадратов и прямоугольник медиальные и оба несоизмеримы между собой.

Что касается до родов биномиалей и вычетов, то они различаются между собой в зависимости от того,

1) *больший* или *меньший* член соизмерим с данной принимаемой за рациональную прямой, или же *никакой*;

2) та прямая, на квадрат которой больший член в квадратах больше меньшего, *соизмерима* или *несоизмерима* с большим членом.

Мы получаем 6 родов соответственно шести возможностям (см. комментарий 38).

41. Классификация иррациональных построений[37]. При создании буквенной Алгебры сейчас же была усмотрена аналогия между числовыми иррациональностями и соответственными им иррациональными и буквенными выражениями, которые лучше всего называть иррациональными буквенными построениями.

Таким образом, $\sqrt{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$ представляет буквенное построение, отвечающее медиали Евклида, построение $\sqrt{a\sqrt{b}+\sqrt{\frac{ba}{\sqrt{a}}}}$ отвечает первой бимедиали.

Предложения Евклида, относящиеся к иррациональным и выражаемые формулами

$$\sqrt{a\pm\sqrt{a^2-d}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{d}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{d}}{2}}$$

или

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b,$$

конечно, верны для всяких a, b, d.

Современная классификация иррациональных построений в равной мере относится и к *числовым* и к *буквенным* построениям. Сперва имеем *рациональные построения*, получаемые *арифметическими* операциями сложения, вычитания, умножения, деления и возведения в степень, в первом случае — над *целыми числами*, во втором случае — над *буквами*.

Таково построение

$$\frac{3a^3-2bc+2a}{(a-b)^2-ac}.$$

Основным иррациональным построением в делении по классам является $\sqrt[m]{A}$, где A — рациональное построение, например, числовое $\sqrt{3}$ или буквенное

$$\sqrt{\frac{3a^3-2bc+2a}{(a+c)^2-ac}}.$$

---

[37]) Petersen, Théorie des équations algébriques.

Вообще построение первого класса — то, которое получается рациональными операциями:

а) над целыми числами и числовыми построениями с однократными иррациональностями,

б) над буквами и буквенными построениями с однократными иррациональностями.

Таково числовое построение $\frac{2\sqrt{5}+\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+1}$ и буквенное

$$\frac{\sqrt{a+b}-c\sqrt{a-b}}{3a^2+b\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Какие из иррациональных построений, отвечающих евклидовым иррациональным, следует отнести к первому классу? — Конечно, *биномиали* и *вычеты*: $\sqrt{\alpha}\pm\sqrt{\beta}$.

Дальше следует *основное построение второго класса*. Это $\sqrt[m]{A^{(1)}}$, где $A^{(1)}$ — построение первого класса.

Таково

$$\sqrt[3]{a^2+b+\sqrt{a-b+c}}.$$

Рациональные операции, во-первых, над целыми числами и числовыми построениями с однократными и двукратными иррациональностями и, во-вторых, над буквами и буквенными построениями такого же типа дают построения второго класса, например:

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}+5\sqrt{3-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}+7\sqrt{3}-\sqrt{2}+\sqrt{3}}.$$

Большинство иррациональных Евклида — второго класса. Таковы бимедиаль и медиальный вычет

$$\sqrt{a}\sqrt{b}+\sqrt{\frac{b\sqrt{b}}{\sqrt{a}}},$$

а также бо́льшая и меньшая иррациональности

$$\sqrt{\frac{a+\sqrt{ab}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{ab}}{2}}$$

Таким же образом от построений второго класса переходим к построениям третьего класса.

Таково, например, построение

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{\sqrt[5]{3a^2b-a^8}+5b^3}+2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{\sqrt{a^2+2b^2}+a}.$$

Евклид не рассматривает иррациональных высших классов, но понимает их существование.

Формулы, отвечающие различным предложениям X книги «Начал» Евклида, с этой точки зрения дают приведение иррациональных построений к простейшему виду, обнаруживая *класс числа или буквенного выражения*.

Такова, например, формула, которая даётся исследованием большей и меньшей иррациональных Евклида:

$$\sqrt{a+\sqrt{a^2-b^2}}=\sqrt{\frac{a+b}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-b}{2}}.$$

Левая часть построения — второго класса, правая — первого.

42. Иррациональности, зависящие от корня квадратного. Евклид мог бы продолжить свои исследования неиррациональным построением высших классов; $\sqrt{ab}$ — среднепропорциональная между a и b площадь — имеет вполне определённое геометрическое значение, равным образом $a+\sqrt{ab}$, $\sqrt{a+\sqrt{ab}}$, а также $\sqrt{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a+\sqrt{ab}}}$, как прямая, среднепропорциональная между стороной квадрата a и стороной квадрата, равновеликого $a+\sqrt{ab}$.

Все эти величины, выражаемые с помощью квадратных радикалов, должны быть признаны *существующими в евклидовом смысле*, так как могут быть построены с помощью *евклидова комплекса*: циркуля и линейки.

Но можно утверждать и обратно, что с помощью евклидова комплекса могут быть построены только те величины, которые выражаются посредством квадратных радикалов. В этом нетрудно убедиться, переводя все на язык аналитической геометрии и обнаруживая, что пересечение прямых определяется с помощью уравнений первой степени, а прямой и круга или двух кругов — с помощью уравнения второй степени.

Только в XIX в. [38]) была доказана невозможность *трисекции* угла с помощью циркуля и линейки, причём вместе с тем и вскрыта *общая метода* для решения задач на построение в *критической* постановке: требуется определить, возможно ли данную задачу решить с помощью циркуля и линейки, и если это возможно, то дать решение.

В теории *критического* решения задач на построение особенно большое значение имеет исследование Гаусса [39]), обнару-

---

[38]) F. Klein, Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementar-Geometrie, Leipz., 1895. — Ф. Клейн, Лекции по избранным вопросам элементарной геометрии, Казань, 1898.

[39]) А. Адлер, Теория геометрических построений, пер. с нем., под ред. и с примеч. С. О. Шатуновского, Mathesis, Одесса, 1924.

живающее возможность построения с помощью евклидова комплекса сторон правильного многоугольника с *простым* числом сторон *только* в том случае, если это есть простое число формы $2^{2^n}+1$, и вместе с тем дающее метод для решения задачи в том случае, когда это условие выполнено. Решение задачи для семнадцатиугольника сводится к построению

$$z=\frac{-1+\sqrt{17}+\sqrt{34+2\sqrt{17}}+\sqrt{68+12\sqrt{17}-16\sqrt{34+2\sqrt{17}}-2(1+\sqrt{17})\sqrt{34-2\sqrt{17}}}}{8},$$

т. е. к построению стороны квадрата, выражаемого числом 17, и к построению второй биномиали $\sqrt{34-2\sqrt{17}}$ и второго медиального вычета и затем более сложной иррациональности, производимой от этих иррациональностей, но не рассматриваемой Евклидом.

43. Доказательство существования иррациональных. Образцом евклидова доказательства иррациональности может служить доказательство иррациональности биномиали $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}$ при $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$, несоизмеримых линейно, что будем писать так: $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}\neq\rho$, но $\alpha:\beta=\rho$ (обозначая через ρ рациональную дробь).

Иррациональность доказывается, конечно, в смысле Евклида, т. е. в том смысле, что $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ несоизмеримо с α. В *арифметизированной форме* это сводится к доказательству *рациональности в нашем смысле* $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$ при рациональных α, β.

Мы это положение будем доказывать так: взяв тождество $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2=\alpha+\beta+2\sqrt{\alpha\beta}$, сведём доказательство к доказательству иррациональности $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, что будет проводиться *апагогически*.

Если положить $\sqrt{\alpha\beta}=\lambda$, где λ рационально, то $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}=\lambda\sqrt{\beta}$, откуда отношение $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}=\frac{\lambda}{\beta}$, т. е. рационально, что противно условию.

Евклид, используя предложение 4, II, идёт по тому же пути. Различие только в том, что он оперирует не с *рациональными дробями, а с отношениями*.

Это использование 4, II имеет место и в других случаях, например, при доказательстве иррациональности биномиалей, когда при возведении в квадрат выражения $\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}+\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}$ оказывается, что сумма квадратов несоизмерима с удвоенным произведением:

$$(\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\sqrt{\delta}):2\sqrt{\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}}\sqrt{\sqrt{\gamma}\sqrt{\delta}}\neq\rho.$$

Так как $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ и $\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}$ можно считать **рациональными** (как соизмеримые), то предыдущее соотношение **сводится к**

$$(a+b):2\sqrt{ab}\neq\rho.$$

Казалось бы, что при доказательстве иррациональности второй бимедиали можно итти следующим путём: из несоизмеримости

$$\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}:\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}\neq\rho$$

получить несоизмеримость

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}:\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}\neq\rho,$$

а затем на основании соизмеримости

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}:(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta})=\rho$$

получить условие несоизмеримости

$$(\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}):2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}\neq\rho.$$

Но $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$ и $2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}$ здесь не *прямые*, а *площади*.

Евклиду необходимо свести это к условию, относящемуся к прямым. Он делает это приведение, полагая

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}=\sqrt{\varepsilon}\cdot y,$$
$$2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}=\sqrt{\varepsilon}z,$$

т. е. приложением к рациональной прямой $\sqrt{\varepsilon}$ прямоугольников, равных площадям $\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}$ и $2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\times\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}$, и доказывая затем, что y, z — рациональные несоизмеримые с $\sqrt{\varepsilon}$ в первой степени.

Из того, что квадрат на бимедиали равен $(y+z)\sqrt{\varepsilon}$, а $y+z$ — биномиаль и потому иррациональна, и выводится иррациональность бимедиали.

Следует отметить, что доказательство для *взаимных* иррациональных (т. е. получаемых заменой плюса на минус) ведётся совершенно так же, но только Евклиду приходится пользоваться не формулой

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2,$$

которой *у него нет* (но которая находится в «**Элементах**» Лежандра), а формулой

$$(a-b)^2+2ab=a^2+b^2.$$

При доказательстве иррациональности прямых, выражаемых построениями второго класса, Евклид поступает аналогичным образом, причём доказательство оказывается проще.

Так, для случая большей иррациональности $U+V$, для которой $U^2:V^2 \neq \rho$, $U^2+V^2=R$, $UV=M$, где R рациональна, а M медиальна, имеем:

$$(U^2+V^2):UV \neq \rho,$$

а по 16, X

$$(U^2+V^2+2UV):(U^2+V^2) \neq \rho.$$

Опять, используя 4, II, получим

$$(U+V)^2:(U^2+V^2) \neq \rho$$

и заключаем об иррациональности $(U+V)^2$.

44. Единственность биномиального разложения. Доказательство единственности разложения на два члена двучленных иррациональностей тоже устанавливается с помощью 4, II.

Образцом может служить такое доказательство, относящееся к биномиали.

В *алгебраической символике* всё сводится к возведению в квадрат равенства

$$\sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{\xi} \pm \sqrt{\eta}, \tag{1}$$

что даёт

$$(\alpha+\beta)-(\xi+\eta) = \pm(2\sqrt{\xi\eta} - 2\sqrt{\alpha\beta}), \tag{2}$$

откуда извлекается невозможность (2), а поэтому и (1), так как (2) означает, что рациональная равна иррациональности.

В этом доказательстве, как и в других аналогичных, рабочей леммой является положение 26, X: медиальная площадь не превосходит медиальной площади на рациональную величину.

Это положение не следует смешивать с предложением 73, в котором доказывается иррациональность (в евклидовом смысле) вычета $\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}$, который, таким образом, не может выражаться ни через a, ни через $\sqrt{a}$, где a принимается за рациональную.

В предложении 26 доказывается аналогичная теорема, но только не для разности двух *прямых*, а *для разности двух площадей*.

Эти два предложения сводятся к одному только при *арифметизации*, т. е. при выражении абстрактными числами как прямых, так и площадей.

Но доказательство может вестись вполне аналогично тому, которое даёт иррациональность вычета.

Евклиду необходимо только ввести корректив, аналогичный тому, что мы выше отметили, т. е. перевести площади на прямые, или к некоторой прямой, принимаемой за рациональную, приложить прямоугольник, равновеликий квадратам на медиальных членах:

$$(\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}})^2 = \delta\sqrt{\varepsilon}, \quad (\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}})^2 = \eta\sqrt{\varepsilon}.$$

Дальше приходится применять 4, II совершенно так же, как в других доказательствах.

Мы, конечно, для доказательства иррациональности $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ пойдём через равенства

$$\sqrt{A}-\sqrt{B}=R,$$
$$\sqrt{A}=R+\sqrt{B},$$
$$A=R^2+2R\sqrt{B}+B,$$

откуда $\sqrt{B}$ оказывается рациональным числом, что противно предположению.

В случае первой бимедиали Евклид ведёт доказательство аналогически и приходит к равенству, в одной части которого

$$2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\delta}}=2\sqrt{\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}}$$

рациональное, а в другой части

$$\left(\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}+\sqrt{\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}}\right)\cdot\left(\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}-\sqrt{\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\mu}}\right)$$

иррациональное.

В случае «большей» иррациональности предположение

$$X+Y=U+V$$

влечёт

$$(X^2+Y^2)-(U^2+V^2)=2UV-2XY,$$

причём получается то же противоречие.

Но дело обстоит значительно сложней в случае *второй бимедиали.*

Здесь Евклид употребляет остроумный приём. Он приводит предположение двойного разложения второй бимедиали к предположению двойного разложения биномиали (невозможность чего им уже раньше доказана), представляя z под двумя формами:

$$u+(z-u) \tag{3}$$

и

$$v+(z-v), \tag{4}$$

где z, u, v определяются уравнениями

$$z\sqrt{\gamma}=\left(\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}+\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}\right)^2=$$
$$=\left(\sqrt{\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}}+\sqrt{\sqrt{\zeta}\cdot\sqrt{\omega}}\right)^2,$$
$$u\sqrt{\gamma}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta},$$
$$v\sqrt{\gamma}=\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}+\sqrt{\zeta}\cdot\sqrt{\omega},$$

и выводя отсюда равенства

$$(z-u)\sqrt{\gamma}=2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}},$$

$$(z-v)\sqrt{\gamma}=2\sqrt{\sqrt{\xi}\cdot\sqrt{\eta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\zeta}\cdot\sqrt{\omega}},$$

дающие возможность заключить, что u и z рациональны и несоизмеримы с $\sqrt{\gamma}$ в первой степени.

Соизмеримость $\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}}$ даёт возможность вывести несоизмеримость

$$\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}\quad\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}\text{ и }2\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}}\cdot\sqrt{\sqrt{\gamma}\cdot\sqrt{\delta}},$$

затем несоизмеримость u и $(z-u)$, а также, если вместо (α, β), (γ, δ) взять (ξ, η), (ζ, ω), — несоизмеримость v и $z-v$.

Обе величины (3), (4) оказываются биномиалями.

Евклид прибавляет *ещё доказательство того, что они не* представляют биномиалей, отличающихся только порядком членов.

45. Построение иррациональных. Совершенно так же, как и в планиметрических книгах, Евклиду приходится доказывать существование в его смысле определяемых объектов, указывая их *построение*. Для оправдания определения бимедиали ему приходится доказывать, что можно найти медиали, соизмеримые только в степени, образующие прямоугольники: 1) рациональный и 2) медиальный (предложения 27, 28).

Построение первой сводится к построению x, среднепропорционального между двумя рациональными $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, соизмеримыми только в степени, и к построению y — четвёртой пропорциональной — из пропорции $\sqrt{\alpha}:\sqrt{\beta}=x:y$.

Для построения второй бимедиали приходится пользоваться пропорциями

$$\sqrt{\alpha}:x=x:\sqrt{\beta},$$

$$\sqrt{\alpha}:\sqrt{\gamma}=x:y,$$

где $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ — три рациональные, соизмеримые только в степени.

Оправдание определений различных биномиалей и иррациональных второго класса ведётся таким образом, что используются как *геометрические*, так и *арифметические* постулаты. На основании их доказывается, что некоторые члены могут быть *найдены*, некоторые прямые *построены*.

При этом арифметические предпосылки доказываются путём применения к числам по существу *геометрических теорем II книги*.

А именно, прежде всего доказывается на основании 6, II, что всегда могут быть найдены такие числа, сумма квадратов которых равна квадрату, и такие, сумма квадратов которых не равна квадрату (лемма к предложению 28).

Образцом применения арифметических предпосылок может служить предложение 29, в котором даётся построение рациональных, соизмеримых только в степени и таких, что бо́льшая в квадратах больше меньшей на квадрат прямой, с ней соизмеримой.

Предлагается найти два целых числа a, b таких, что $a^2 - b^2$ не представляет квадрата, и определить x и y из пропорции

$$x^2 : y^2 = a^2 : (a^2 - b^2),$$

которая даёт: $x^2 : (x^2 - y^2) = a^2 : b^2$.

Так же Евклид поступает при установке определения биномиалей.

При построении двух медиалей, соизмеримых только в степени, образующих медиальный прямоугольник, и таких, что бо́льшая в квадратах, больше меньшей на квадрат, с ней соизмеримой, Евклиду уже нет нужды обращаться к *числам*; он может оперировать на основании 29, I прямыми α, β, γ так: положив $x^2 = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$ и $xy = \sqrt{\beta} \cdot \sqrt{\gamma}$, определить x, y из пропорции

$$x : y = \sqrt{\alpha} : \sqrt{\gamma} \neq \rho.$$

Тогда $\sqrt{x^2 - y^2} : x = \rho$.

Задача о разыскании x и y сводится к построению корней квадратных уравнений или, точнее, системы

$$x + y = A, \qquad xy = B.$$

Следует отметить, что, начиная с предложения 32, Евклиду нет нужды обращаться к числам. На основании предложения 30 он может строить прямые, соизмеримые в степени, такие, что

$$\sqrt{a^2 - b^2} : a \neq \rho.$$

Тогда x, y определяются уравнениями $x + y = a$, $xy = \frac{b^2}{4}$ или построением прямоугольника на прямой a, равного квадрату на $\frac{b}{2}$ с недостающим квадратом.

Таким же образом Евклид поступает и при установке существования других иррациональных второго класса (34, 35), причём все эти рассуждения, за малыми изменениями, дают возможность установить существование и *взаимных* иррациональных.

46. Доказательства существования шести видов биномиалей. В предложениях 48 — 53 даются доказательства существования шести биномиалей $A + B$, где $A > B$.

Пусть r будет некоторая рациональная прямая. Для первой биномиали больший член соизмерим линейно с этой прямой, т. е. имеет форму mr, второй же обладает тем свойством, что его

квадрат меньше квадрата первого члена на квадрат прямой, соизмеримой линейно с первым членом, т. е.

$$B^2 = (mr)^2 - (nr)^2.$$

Таким образом, первую биномиаль можно изобразить в виде

$$B_1 = mr + \sqrt{m^2 - n^2} \cdot r.$$

Для второй биномиали мы имеем, что второй член имеет вид mr, а первый определится из условия

$$A^2 = (mr)^2 + (nA)^2,$$

откуда вторая биномиаль будет иметь вид

$$B_2 = \frac{m}{\sqrt{1 - n^2}} r + mr.$$

Для третьей биномиали, где ни один из членов несоизмерим линейно с рациональной прямой r, мы можем взять форму $\sqrt{a} + \sqrt{b}$. Условие, что квадрат первого члена равняется квадрату второго члена плюс квадрат на прямой, соизмеримой линейно с первым членом, даёт:

$$a = b + n^2 a,$$

и окончательно:

$$B_3 = \sqrt{a} + \sqrt{1 - n^2}\sqrt{a}.$$

Для четвёртой биномиали мы имеем, что квадрат первого члена равен квадрату второго плюс квадрат на прямой, несоизмеримой с первым членом.

Если взять биномиаль в виде

$$\sqrt{a} + \sqrt{b},$$

то мы будем иметь $a - b = c$, где b неточный квадрат. Возьмём

$$a = mr,$$

тогда

$$B_4 = mr + \sqrt{m^2 r^2 - c}.$$

Для пятой биномиали, где соизмерим с рациональной второй член, будем иметь:

$$B_5 = \sqrt{m^2 r^2 + c} + mr.$$

Наконец, для шестой, где ни один член не будет соизмерим с рациональной, мы будем иметь:

$$B_6 = \sqrt{a} + \sqrt{b},$$

причём $b = a - c$ не должно составлять точного квадрата.

Построение первой биномиали, согласно предложению 48, сводится к следующему:

Берём $AC = a$, $CB = b$ так, чтобы имело место отношение

$$\frac{AB}{BC} = \frac{a+b}{b} = \frac{m^2}{n^2},$$

но чтобы отношение

$$\frac{AB}{AC} = \frac{a+b}{a}$$

не равнялось отношению квадратных чисел.

Откладываем рациональную прямую $D = r$ и берём $EI = kr$. Затем составляем пропорцию

$$\frac{AB}{AC} = \frac{EI^2}{IH^2} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{k^2r^2}{x^2}.$$

Отсюда определяем $IH = x$; оно будет:

$$x = kr\sqrt{\frac{a}{a+b}},$$

т. е. будет рациональным в смысле Евклида; так как подкоренное выражение не представляет точного квадрата, то $EI = kr$ и $IH = x$ не будут линейно соизмеримы. Это показывает, что их сумма будет биномиалью

$$EH = kr + kr\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Для доказательства, что она будет первой биномиалью, исходим из равенства

$$\frac{BA}{AC} = \frac{EI^2}{IH^2},$$

которое показывает нам, что $EI = kr$ будет больше $IH = kr\sqrt{\frac{a}{a+b}}$.

Полагаем $EI^2 = IH^2 + G^2$.

Нам нужно доказать, что G будет линейно соизмеримо с $EI = kr$. В нашем обозначении мы просто напишем:

$$G^2 = EI^2 - IH^2 = k^2r^2 - k^2r^2\left(\frac{a}{a+b}\right) =$$
$$= k^2r^2\frac{b}{a+b} = k^2r^2\frac{n^2}{m^2},$$

откуда

$$G = kr\cdot\frac{n}{m},$$

что и доказывает предложение. Евклиду приходится итти несколько более сложным путём. Он пишет:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{EI^2}{IH^2}, \text{ или } \frac{a+b}{a} = \frac{IH^2 + G^2}{IH^2},$$

откуда, «переворачивая», он получает:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{EI^2}{G^2}$$

или

$$\frac{m^2}{n^2} = \frac{EI^2}{G^2}, \text{ т. е. } G = EI \cdot \frac{n}{m}.$$

Если выразим $\frac{a}{a+b}$ через m и n, то будем иметь:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{m^2 - n^2}{n^2},$$

$$\frac{a}{a+b} = \frac{m^2 - n^2}{m^2},$$

и выражение для первой биномиали принимает вид

$$B_1 = kr + kr\frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{m}.$$

В предложении 49 даётся способ построения второй биномиали. Берём числа $AC = a$, $CB = b$, обладающие тем свойством, что

$$\frac{a+b}{b} = \frac{m^2}{n^2}; \quad \frac{a-b}{b} \text{ не квадрат.}$$

Откладываем рациональную $D = r$ и $EI = kr$. Затем составляем пропорцию

$$\frac{CA}{AB} = \frac{EI^2}{IH^2} \text{ или } \frac{a}{a+b} = \frac{k^2r^2}{x^2},$$

откуда

$$IH = x = kr\sqrt{\frac{a+b}{a}}.$$

Так как подкоренное выражение не будет точным квадратом, то сумма $EI + IH$ будет биномиалью, где $EI = kr$ будет теперь уже меньшим членом

$$EH = kr\sqrt{\frac{a+b}{a}} + kr$$

Для доказательства, что это будет вторая биномиаль, полагаем:

$$IH^2 = EI^2 + G^2 \text{ или } k^2r^2 \cdot \frac{a+b}{a} = k^2r^2 + G^2,$$

откуда

$$G = kr\sqrt{\frac{b}{a}} = kr\sqrt{\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a+b}{a}} = kr\cdot\frac{n}{m}\sqrt{\frac{a+b}{a}},$$

т. е. величина, соизмеримая с бо́льшим членом $IH = kr\sqrt{\frac{a+b}{a}}$.

У Евклида это получается так:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{IH^2}{EI^2} \text{ или } \frac{a+b}{a} = \frac{EI^2+G^2}{EI^2};$$

$$\frac{a+b}{b} = \frac{IH^2}{G^2}, \quad G = IH\sqrt{\frac{b}{a+b}} = \frac{n}{m}\cdot IH.$$

Если выразить $\frac{a+b}{a}$ через $\frac{m}{n}$, то будем иметь:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{m^2}{n^2}, \quad \frac{a}{b} = \frac{m^2-n^2}{n^2},$$

$$\frac{a+b}{a} = \frac{m^2}{m^2-n^2},$$

и выражение для второй биномиали принимает вид

$$B_2 = kr\frac{m}{\sqrt{m^2-n^2}} + kr.$$

В предложении 50 строится третья биномиаль, для которой попрежнему разность квадратов большего и меньшего члена равна квадрату прямой, соизмеримой с бо́льшим членом, но зато оба члена не выражаются через рациональную прямую r.

Берём $AC = a$, $CB = b$, удовлетворяющие условиям $\frac{a+b}{b} = \frac{m^2}{n^2}$, $\frac{a+b}{a}$ = не квадрат. Возьмём некоторое неквадратное число $D = d$, обладающее тем свойством, что отношения $\frac{a+b}{d}$, $\frac{a}{d}$ не выражаются квадратными числами. Затем берём рациональную прямую $E = r$ и определяем $IH = x$ из пропорции

$$\frac{D}{AB} = \frac{E^2}{IH^2}, \text{ откуда } IH = x = r\sqrt{\frac{a+b}{d}}.$$

Полученное число $IH = x$ будет рациональным в смысле Евклида и линейно несоизмеримым с E; оно дает нам первый член искомой биномиали.

Для получения второго члена исходим из равенства

$$\frac{BA}{AC} = \frac{IH^2}{HC^2} \text{ или } \frac{a+b}{a} = \frac{x^2}{y^2},$$

откуда

$$GH = y = x\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$

это будет рациональная в смысле Евклида, линейно несоизмеримая с x длина; сумма этих длин

$$IG = x + y = x + x\sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

представляет искомую биномиаль.

Для того чтобы убедиться, что она будет третьей, мы должны доказать равенство

$$x^2 = y^2 + (kx)^2$$

и, кроме того, показать, что GH, так же как и IH, не выражаются рационально в нашем смысле через $E - r$. Для IH это уже доказано:

$$IH = x - r\sqrt{\frac{a+b}{d}}.$$

Для GH это получится из равенства

$$GH = \sqrt{\frac{a}{a+b}} \cdot IH = r\sqrt{\frac{a}{d}};$$

поскольку $\frac{a}{d}$ не представляет точного квадрата, то GH будет линейно несоизмерима с $E - r$.

Так как $IH > GH$, то пишем:

$$IH^2 = GH^2 + k^2.$$

Мы имели:

$$\frac{BA}{AC} = \frac{IH^2}{HG^2} \text{ или } \frac{a+b}{a} = \frac{GH^2 + k^2}{GH^2}.$$

Отсюда, «переворачивая», получаем:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{IH^2}{k^2}$$

и

$$k = IH\sqrt{\frac{b}{a+b}} = IH \cdot \frac{n}{m}.$$

Таким образом, разность квадратов первого и второго членов соизмерима линейно с первым членом

Если выразить $\frac{a}{a+b}$ через $\frac{m}{n}$, то мы будем иметь:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{m^2}{n^2},\quad \frac{a}{b}=\frac{m^2-n^2}{n^2},$$

$$\frac{a}{a+b}=\frac{m^2-n^2}{m^2}.$$

Выражение для третьей биномиали принимает вид

$$B_3=x+\frac{x}{m}\sqrt{m^2-n^2}=x+x\sqrt{1-\left(\frac{n}{m}\right)^2}.$$

Если положить $\sqrt{\frac{a+b}{d}}=\sqrt{k}$, $\frac{n}{m}=\lambda$, то

$$B_3=r\sqrt{k}+r\sqrt{k}\cdot\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Для трёх остальных биномиалей разность квадратов обоих членов не будет равняться квадрату прямой, соизмеримой с большим членом.

В предложении 51 даётся построение четвёртой биномиали.

Берём $AC=a$, $CB=b$ такие, что отношения $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$ не выражаются квадратными числами. Откладываем рациональную прямую $D=r$ и строим $EI=kr$. Затем составляем пропорцию

$$\frac{AB}{AC}=\frac{EI^2}{IH^2}\quad\text{или}\quad\frac{a+b}{a}=\frac{(kr)^2}{x^2},$$

откуда

$$IH=x=kr\sqrt{\frac{a}{a+b}};$$

мы получим величину, рациональную в смысле Евклида, но линейно несоизмеримую с $EI=kr$. Сумма отрезков

$$EH=EI+IH=kr+kr\sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

будет, таким образом, биномиалью.

Первый член ее $EI=kr$ линейно соизмерим с рациональной прямой $D=r$, второй же — нет; следовательно, для того чтобы доказать, что рассматриваемая биномиаль будет четвёртой, остаётся убедиться, что разность квадратов обоих членов EI^2-IH^2 не будет выражаться квадратом на прямой, соизмеримой с первым членом.

Имеем

$$EI^2=IH^2+G^2.$$

Из пропорции

$$\frac{a+b}{a}=\frac{EI^2}{IH^2},$$

«переворачивая», получаем:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{EI^2}{G^2},$$

откуда

$$G=EI\sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

что действительно представляет линейно несоизмеримую с EI прямую.

Выражение искомой биномиали будет:

$$B_4 \quad kr+kr\frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{b}}}=kr\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\right).$$

В предложении 52 находится выражение для пятой биномиали.

При тех же значениях a, b, r и $EI=kr$, что и выше, составляем пропорцию

$$\frac{AC}{AB}=\frac{EI^2}{IH^2} \text{ или } \frac{a}{a+b}=\frac{(kr)^2}{x^2},$$

откуда

$$IH \quad x=kr\sqrt{\frac{a+b}{a}}.$$

Так как IH рациональна в смысле Евклида и линейно несоизмерима с $EI=kr$, то сумма $EI+IH$ будет представлять биномиаль, в которой IH будет бо́льшим членом:

$$EH \quad kr\sqrt{\frac{a+b}{a}}+kr.$$

Для того чтобы доказать, что она будет пятой, нужно убедиться, что разность квадратов IH^2-EI^2 не будет соизмерима с IH. Мы имеем:

$$\frac{AC}{AB}=\frac{EI^2}{IH^2} \text{ или } \frac{a}{a+b}=\frac{EI^2}{IH^2}.$$

Полагаем:

$$IH^2=EI^2+G^2.$$

В таком случае, «переворачивая» пропорцию

$$\frac{a+b}{a}=\frac{IH^2}{EI^2},$$

получим:

$$\frac{a+b}{b}=\frac{IH^2}{G^2},$$

откуда

$$G=IH\cdot\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

Так как выражение под корнем не представляет точного квадрата, то G не будет линейно соизмерима с IH — бо́льшим членом рассматриваемой биномиали.

Если положить $\frac{b}{a}=k$, то выражение для пятой биномиали примет вид

$$B_5=kr\sqrt{1+k}+kr.$$

В предложении 53 даётся способ получения шестой биномиали.

Взявши попрежнему $AC=a$ и $CB=b$, удовлетворяющие тем же условиям, что и выше, откладываем ещё $D=d$, не являющееся квадратом и не делающее квадратами отношений $\frac{a+b}{d}$ и $\frac{a}{d}$. Берём рациональную прямую $E=r$ и строим пропорцию

$$\frac{D}{AB}=\frac{E^2}{IH^2}\quad\text{или}\quad\frac{d}{a+b}=\frac{r^2}{x^2},$$

откуда

$$IH=x=r\sqrt{\frac{a+b}{d}}.$$

Мы получили рациональную в смысле Евклида и линейно несоизмеримую с E прямую; она будет первым членом нашей биномиали.

Для получения второго члена будем исходить из пропорции

$$\frac{AB}{AC}=\frac{IH^2}{HG^2}\quad\text{или}\quad\frac{a+b}{a}=\frac{x^2}{y^2},$$

откуда

$$HG=y=x\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Длина y, согласно сделанным предложениям, будет соизмерима с x только в степени; сумма

$$IG=x+y=x+x\sqrt{\frac{a}{a+b}}$$

будет биномиалью.

Если мы хотим доказать, что эта биномиаль будет шестой, нам нужно убедиться, что ни x, ни y не будут линейно соизмеримы с рациональной прямой r. Для $x = IH$ это непосредственно следует из равенства

$$x = r\sqrt{\frac{a+b}{d}}.$$

Для y мы доказали бы это, подставив в формулу для y его выражение через x:

$$y = x\sqrt{\frac{a}{a+b}} = r\sqrt{\frac{a+b}{d}}\cdot\sqrt{\frac{a}{a+b}} = r\sqrt{\frac{a}{d}}.$$

Евклиду приходится итти более сложным путём. Из равенств

$$\frac{D}{AB} = \frac{E^2}{IH^2} \quad \text{или} \quad \frac{d}{a+b} = \frac{r^2}{x^2},$$

$$\frac{BA}{AC} = \frac{IH^2}{HG^2} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{a} = \frac{x^2}{y^2}$$

он находит «по равенству», что

$$\frac{d}{a} = \frac{r^2}{y^2},$$

откуда

$$y = r\sqrt{\frac{a}{d}}.$$

Теперь остаётся только показать, что $x^2 - y^2$ не будет выражаться квадратом на отрезке, соизмеримом с $x = IH$.

Полагаем

$$x^2 = y^2 + k^2, \quad \text{т. е.} \quad IH^2 = HG^2 + k^2,$$

и из пропорции

$$\frac{BA}{AC} = \frac{IH^2}{HG^2},$$

«переворачивая», получаем:

$$\frac{BA}{BC} = \frac{IH^2}{k^2} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{b} = \frac{x^2}{k^2},$$

откуда

$$k = x\sqrt{\frac{b}{a+b}},$$

т. е. k будет линейно несоизмерима с x.

Выражение для шестой биномиали может быть записано в виде

$$B_6 = r\sqrt{\frac{a+b}{d}} + r\sqrt{\frac{a}{d}},$$

что, очевидно, можно представить и в виде

$$B_6 = r\sqrt{m} + r\sqrt{n}.$$

(*И. В.*)

47. Связь между первой гексадой иррациональных и различными видами биномиалей. Следующие двенадцать предложений (54—65) имеют целью выяснить смысл введения шести биномиалей. Античный схолиаст объединял их вместе под заглавием (Heiberg, т. V, № 309, стр. 538):

«Шестая глава, показывающая, что шесть полученных сложением иррациональных образуют площади, заключённые между рациональной ⟨прямой⟩ и какой-нибудь одной из шести биномиалей».

Если принять эту рациональную за единицу, то высказанное положение равносильно будет с нашей точки зрения следующему утверждению:

«Квадрат каждой из шести иррациональных первой гексады даёт соответственно одну из шести биномиалей».

Доказательство этих теорем начинается с леммы, которая в современных обозначениях выразилась бы так:

$$AC = a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2,$$

$$DH = ab = \sqrt{a^2 \cdot b^2},$$

или

$$a^2 : ab = ab : b^2$$

$$DC = (a+b)\,b = \sqrt{(a+b)^2 \cdot b^2},$$

или

$$(a+b)^2 : (a+b)\,b = (a+b)\,b : b^2.$$

Предложение 54 гласит, что произведение первой биномиали на рациональную прямую можно представить в виде квадрата на биномиали.

Если выражение для первой биномиали написать в виде

$$B_1 = kr + kr\sqrt{1-\lambda^2},$$

где $\lambda = \frac{n}{m}$ в наших прежних обозначениях, а обозначение для биномиали взять в виде

$$B = \sqrt{x} + \sqrt{y},$$

то наша теорема будет эквивалентна равенству

$$k_1 r\left\{kr\left(1+\sqrt{1-\lambda^2}\right)\right\} = (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

что равносильно следующим уравнениям:

$$x+y=kk_1\cdot r^2,$$
$$2\sqrt{xy}=kk_1r^2\sqrt{1-\lambda^2},$$

где x и y определяются как корни квадратного уравнения

$$z^2-kk_1\cdot r^2\cdot z+\frac{(kk_1)^2\cdot r^4}{4}(1-\lambda^2)=0,$$

откуда

$$z=\frac{kk_1r^2}{2}\pm\sqrt{\frac{(kk_1)^2r^4}{4}-\frac{(kk_1)^2r^4}{4}(1-\lambda^2)}=\frac{kk_1r^2}{2}(1\pm\lambda).$$

Таким образом, для x и y получаются рациональные выражения

$$x=\frac{kk_1r^2}{2}(1+\lambda),\qquad y=\frac{kk_1r^2}{2}(1-\lambda),$$

что и доказывает нашу теорему.

Евклидово доказательство заключается в следующем. Пусть $AB=r$ будет рациональная прямая, а $AD=AE+ED$ — первая биномиаль, в которой

$$AE=kr,\quad ED=kr\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Берём:

$$EI=\frac{ED}{2}=\frac{kr}{2}\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Так как $AE^2=ED^2+(\lambda\cdot AE)^2$, то мы можем воспользоваться теоремой о приложении с недостатком в виде квадрата в комбинации с предложением 17 X книги, которое говорит (вторая половина):

Черт. 20.

«Если в квадратах бо́льшая будет больше меньшей на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой [линейно] ⟨прямой⟩, к большей же приложен с недостатком в виде квадрата ⟨параллелограмм⟩, равный четверти ⟨квадрата⟩ на меньшей, то он разделяет её на соизмеримые линейно ⟨отрезки⟩».

Это значит, что если мы приложим к AE площадь, равную EI^2 так, чтобы она давала недостаток в виде квадрата на HE, то отрезки AH и HE будут между собой линейно соизмеримы (черт. 20).

На следующем этапе Евклид ищет квадрирующую прямоугольника $AD\times AB$, который можно представить в виде суммы четырёх прямоугольников

$$AG=AH\cdot AB,\quad HK=HE\cdot AB,\quad EL=IC=EI\cdot AB.$$

Построим квадраты

$$u^2 = SN^2 = AH \cdot AB,$$
$$v^2 = NP^2 = HE \cdot AB.$$

Так как, по условию,

$$AH \cdot HE = EI^2,$$

то

$$AG \cdot HK = AH \cdot HE \cdot AB^2 = EI^2 \cdot AB^2 = EL^2.$$

Таким образом, EL есть средняя пропорциональная между AG и HK, т. е. между u^2 и v^2. Но средняя пропорциональная между u^2 и v^2, согласно только что доказанной лемме, будет uv, значит, $EL = uv$. Теперь площадь

$$AB \cdot AD = AH \cdot AB + HE \cdot AB + 2EI \cdot AB$$
$$= u^2 + v^2 + 2uv = (u + v)^2 = (\sqrt{AH \cdot HB} + \sqrt{HE \cdot AB})^2.$$

Таким образом, найдена квадрирующая для прямоугольника $AB \cdot AD$ она равна будет

$$u + v = MV + NX.$$

Нам нужно показать, что эта квадрирующая будет биномиалью. Для этого нужно только убедиться, что u и v будут рациональными в смысле Евклида, но соизмеримыми между собой *только в квадратах*.

Согласно определению первой биномиали первый её член AE соизмерим с рациональной $AB = r$. Затем, поскольку отрезки AH и HE будут соизмеримы между собой линейно, то они будут соизмеримы и со своей суммой AE, а следовательно, и с AB. Таким образом, $AH \cdot AB = u^2$ и $HE \cdot AB = v^2$ будут рациональные площади, т. е. u и v соизмеримы между *собой в квадратах*.

Остаётся доказать, что они будут линейно между собой несоизмеримы. Поскольку AD есть разделенная в E первая биномиаль, то AE несоизмерима с DE линейно; а так как AH соизмерима с AE, а $EI = \frac{DE}{2}$ с DE, то AH не будет соизмерима с EI. Но

$$AH \cdot AB = u^2, \quad EI \cdot AB = uv;$$

следовательно, u^2 и uv, а значит, u и v будут линейно несоизмеримы между собой.

В предложении 55 доказывается, что квадрат бимедиали равняется произведению второй биномиали на рациональную прямую.

Выражение для второй биномиали мы можем взять в виде

$$B_2 = \frac{kr}{\sqrt{1 - k^2}} + kr.$$

Наша задача сводится к тому, чтобы найти квадратный корень из выражения

$$r\left(\frac{kr}{\sqrt{1-\lambda^2}}+kr\right).$$

Возьмём корень из этого выражения в виде

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

Мы получим равенство

$$kr^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}+1\right)=(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2,$$

эквивалентное уравнениям

$$x+y=\frac{kr^2}{\sqrt{1-\lambda^2}},\quad xy=\frac{k^2r^4}{4},$$

где x и y определятся как корни квадратного уравнения

$$z^2-\frac{kr^2}{\sqrt{1-\lambda^2}}z+\frac{k^2r^4}{4}=0,$$

откуда

$$z=\frac{kr^2}{2\sqrt{1-\lambda^2}}(1\pm\lambda).$$

Это даёт нам:

$$x=\frac{kr^2}{2\sqrt{1-\lambda^2}}(1+\lambda)=\frac{kr^2}{2}\sqrt{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}},$$

$$y=\frac{kr^2}{2\sqrt{1-\lambda}}(1-\lambda)=\frac{kr^2}{2}\sqrt{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}.$$

После этого искомый квадратный корень представится в виде

$$r\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\sqrt[4]{\frac{1+\lambda}{1-\lambda}}+\sqrt[4]{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}\right).$$

Мы имеем сумму двух медиалей. Так как

$$\frac{x}{y}=\frac{1+\lambda}{1-\lambda}=\text{рац. числу},$$

то обе медиали будут соизмеримы между собой в квадратах. Далее, поскольку

$$xy=\frac{k^2r^4}{4},$$

то произведение этих медиалей будет выражаться рациональным числом

$$\sqrt{xy} = \frac{kr^2}{2}.$$

Оба доказанных свойства обнаруживают, что мы имеем дело с первой бимедиалью.

Конечно, Евклиду пришлось пойти более сложным путём. Он берёт рациональную прямую $AB = r$ и вторую биномиаль $AD = AE + ED = \frac{kr}{\sqrt{1-\lambda^2}} + kr$, второй член которой будет линейно соизмерим с $AB = r$.

Так как

$$\frac{k^2r^2}{1-\lambda^2} = k^2r^2 + \frac{\lambda^2 \cdot k^2r^2}{1-\lambda^2},$$

то, как и в предыдущем предложении, можем воспользоваться теоремой 17, X. Если к AE приложим с недостатком в виде квадрата площадь, равную $\left(\frac{kr}{2}\right)^2$, то точка деления H разобьёт AE на два отрезка AH и HE, которые будут линейно соизмеримы между собой. Аналогично предыдущему предложению доказываем, что квадрирующая площадь $AB \cdot AD$ будет:

$$MN + NX = u + v,$$

где $u^2 = AH \cdot AB$, $v^2 = HE \cdot AB$.

Остаётся показать, что эта квадрирующая будет первой бимедиалью.

Так как AD представляет вторую биномиаль, то первый её член AE несоизмерим со вторым ED; так как последний, имеющий вид kr, соизмерим с $AB = r$, то значит, AE, а следовательно, и её соизмеримые между собой части AH и HE не будут соизмеримыми с AB, таким образом, площади $u^2 = AH \cdot AB$ и $v^2 = HE \cdot AB$ будут медиальными, а сами u и v — медиалями.

Далее, вследствие линейной соизмеримости отрезков AH и HE будут соизмеримы между собой площади u^2 и v^2, таким образом, медиали u и v будут соизмеримы между собой в квадратах. Из несоизмеримости же AH и EI совершенно так же, как в предыдущем предложении, заключаем о несоизмеримости u и v.

После этого остаётся лишь убедиться, что произведение медиалей uv будет рациональным. Это легко получается, если принять во внимание, что $uv = \sqrt{AH \cdot HE} \cdot AB = EI \cdot AB$; поскольку же EI, как половина $ED = kr$, будет соизмерима с $AB = r$, то и рассматриваемый прямоугольник $uv = \frac{kr}{2} \cdot r$ будет рациональным.

В предложении 55 доказывается, что произведение рациональной и третьей биномиали равно квадрату второй биномиали.

Если мы возьмём третью биномиаль в виде

$$B_3 = r\sqrt{k}(1 + \sqrt{1-\lambda^2}),$$

то нам предстоит определить x и y из уравнения

$$r \cdot r\sqrt{k}(1 + \sqrt{1-\lambda^2}) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^4,$$

что равносильно системе уравнений

$$x + y = r^2\sqrt{k}, \quad xy = \frac{kr^4}{4}(1-\lambda^2).$$

Искомые величины будут корнями квадратного уравнения

$$z^2 - r^2\sqrt{k} \cdot z + \frac{kr^4}{4}(1-\lambda^2) = 0,$$

откуда

$$x = \frac{r^2\sqrt{k}}{2}(1+\lambda), \qquad y = \frac{r^2\sqrt{k}}{2}(1-\lambda).$$

Таким образом, квадрирующая иррациональная будет иметь вид

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = r\sqrt{\frac{\sqrt{k}(1+\lambda)}{2}} + r\sqrt{\frac{\sqrt{k}(1-\lambda)}{2}}.$$

Поскольку в выражение её входят корни 4-й степени, мы имеем дело с бимедиалью.

Так как

$$\frac{x}{y} = \frac{1+\lambda}{1-\lambda} \text{ — рац. число},$$

то квадраты обоих ее членов будут линейно соизмеримы между собой. Далее,

$$\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \frac{r}{2}\sqrt{k}\sqrt{1-\lambda^2},$$

т. е. произведение обеих иррациональностей представляет медиальную площадь. Наконец, сумма $x + y = r^2\sqrt{k}$ будет рациональной в смысле Евклида. Все эти обстоятельства показывают, что мы имеем дело со второй бимедиалью.

Доказательство этого Евклид проводит аналогично вышеприведённым. Он рассматривает произведение рациональной прямой $AB = r$ на третью биномиаль $AD = AE + ED$, где

$$AE = r\sqrt{k}, \quad ED = r\sqrt{k}\sqrt{1-\lambda^2}.$$

Так как разность квадратов этих прямых

$$AE^2 - ED^2 = \lambda^2 (r\sqrt{k})^2,$$

то мы видим, что она представляет квадрат на прямой $\lambda \cdot AE$, соизмеримой первому члену. Это обстоятельство позволяет нам утверждать, что если мы приложим к первому члену AE с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата второго члена ED, то AE распадётся на два линейно соизмеримых между собой отрезка AH и HE, которые, однако, с рациональной $AB = r$ будут соизмеримы только в квадратах. Прямая, квадрирующая площадь $AB \cdot AD$, будет

$$MN + NX = u + v,$$

где

$$u^2 = AH \cdot AB, \quad v^2 = HE \cdot AB.$$

Это показывает, что u и v будут медиалями, соизмеримыми между собой в квадратах (нужно помнить, что AH и HE, равно как и AE, не будут линейно соизмеримы с рациональной $AB = r$). Линейная несоизмеримость отрезков u и v попрежнему будет вытекать из линейной несоизмеримости AH и $EI = \frac{ED}{2}$.

Для доказательства, что мы имеем дело со второй бимедиалью, остаётся убедиться, что произведение uv будет медиальным. Так как

$$uv = AB \cdot \sqrt{AH \cdot HE} = AB \cdot \frac{ED}{2},$$

то это следует из факта линейной несоизмеримости ED с рациональной прямой AB.

В предложении 57 Евклид обнаруживает, что произведение рациональной прямой $AB = r$ на четвёртую биномиаль $AE + ED = kr + \frac{kr}{\sqrt{1+\lambda}}$ даёт квадрат на так называемой «большей» иррациональной, характеризуемой тем свойством, что оба её члена будут несоизмеримы в квадратах, но сумма их квадратов будет рациональна, в то время как произведение медиально.

С нашей точки зрения, доказательство этого предложения равносильно решению уравнения

$$r\left(kr + \frac{kr}{\sqrt{1+\lambda}}\right) = (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Искомые значения x и y будут корнями квадратного уравнения

$$z^2 - kr^2 \cdot z + \frac{k^2 r^4}{4(1+\lambda)} = 0.$$

Решая это уравнение, получаем:

$$x = \frac{kr^2}{2}\left(1 + \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\right), \qquad y = \frac{kr^2}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\right).$$

Рассмотрение этих выражений показывает нам, что $\sqrt{x}$ и $\sqrt{y}$ будут медиалями, несоизмеримыми между собой даже в степени, имеющими сумму квадратов рациональную:

$$x + y = kr^2,$$

произведение же медиальное:

$$\sqrt{xy} = \frac{kr^2}{\sqrt{1+\lambda}}.$$

Все эти признаки характеризуют так называемую «бо́льшую» иррациональную.

Доказательство этого у Евклида развивается так. Он берёт произведение $AB = r$ на биномиаль $AE + FD = kr + \frac{kr}{\sqrt{1+\lambda}}$. Из свойств четвёртой биномиали вытекает, что AF, ED будут рациональными в смысле Евклида, соизмеримыми только в степени, причём

$$AE^2 - ED^2 = (kr)^2 - \frac{(kr)^2}{1+\lambda} = \left(kr\sqrt{\frac{\lambda}{1+\lambda}}\right)^2,$$

т. е. квадрат первого члена будет больше квадрата второго на квадрат прямой, линейно несоизмеримой с первым членом $AE = kr$, который сам будет линейно соизмерим с $AB = r$.

Если мы повторим приложение к AE с недостатком в виде квадрата площади, равной четверти квадрата на ED, то вследствие линейной несоизмеримости AE и ED, согласно предложению 18, получим отрезки AH и HE, которые будут линейно несоизмеримы.

Построением, аналогичным предыдущим теоремам, Евклид определяет квадрирующую MX площади $AB \cdot AD$ в виде прямой

$$MN + NX = u + v,$$

где u и v определяются из уравнений

$$u^2 = AH \cdot AB, \quad v^2 = HE \cdot AB.$$

Остаётся доказать, что эта прямая будет «большей» иррациональностью.

1) Из линейной несоизмеримости AH и HE следует, что u и v будут несоизмеримы даже в квадратах.

2) Так как $AE = kr$ соизмерима с $AB = r$, то

$$u^2 + v^2 = (AH + HE) \cdot AB = kr^2$$

будет рациональной площадью.

3) Так как $AH \cdot HE = \left(\frac{ED}{2}\right)^2$, то $\sqrt{AH \cdot HE} = \frac{ED}{2}$ будет линейно несоизмерима с AB, а значит, площадь

$$uv = AB \cdot \frac{ED}{2}$$

будет медиальной. Эти свойства являются определяющими «большую» иррациональность.

В предложении 58 Евклид доказывает, что произведение рациональной прямой на пятую биномиаль даст квадрат радио*нально- и медиально-квадрирующей*, которая определяется тем, что сумма квадратов обоих её несоизмеримых между собой линейно членов будет медиальной, произведение же их рациональным.

Мы имеем равенство

$$r(kr\sqrt{1+\lambda} + kr) = (x+y)^2.$$

Так как сумма $x^2 + y^2$ должна быть медиальной, то мы имеем:

$$x^2 + y^2 = kr^2\sqrt{1+\lambda},$$

рациональность же произведения xy даёт нам:

$$xy = \frac{kr^2}{2}.$$

Для определения x^2 и y^2 мы имеем квадратное уравнение

$$z^2 - kr^2\sqrt{1+\lambda} \cdot z + \frac{k^2r^4}{4} = 0,$$

откуда

$$x^2 = \frac{kr^2}{2}(\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}), \quad y^2 = \frac{kr^2}{2}(\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}).$$

Квадрирующая иррациональность приобретает вид

$$x + y = r\sqrt{\frac{k}{2}}\left(\sqrt{\sqrt{1+\lambda} + \sqrt{\lambda}} + \sqrt{\sqrt{1+\lambda} - \sqrt{\lambda}}\right).$$

Это будет сумма двух несоизмеримых даже в степени медиалей, сумма квадратов которых

$$x^2 + y^2 = kr^2\sqrt{1+\lambda}$$

медиальна, а произведение

$$xy = \frac{kr^2}{2}$$

рационально. Мы получили рационально- и медиально-квадрирующую.

У Евклида доказательство развивается так: берём произведение рациональной $AB = r$ на пятую биномиаль $AD = AE + ED = kr\sqrt{1+\lambda} + kr$, второй член которой ED линейно соизмерим с $AB = r$.

При помощи построений, описанных выше, т. е. путём приложения с недостатком в виде квадрата к AE площади, равной четверти квадрата на ED, прямая AE разделяется на два отрезка AH и HE, которые вследствие линейной несоизмеримости AE и ED будут между собой по предложению 18 несоизмеримыми. Эти отрезки AH и HE служат для определения членов u и v квадрирующей прямой согласно уравнениям

$$u^2 = AH \cdot AB, \quad v^2 = HE \cdot AB.$$

Нам предстоит доказать, что квадрирующая прямая

$$MN + NX = u + v$$

является рационально- и медиально-квадрирующей.

1) Из несоизмеримости AH и HE выводим, что отрезки u и v будут несоизмеримыми даже в квадратах.

2) Вследствие несоизмеримости $AE = kr\sqrt{1+\lambda}$ с $AB = r$ сумма квадратов $u^2 + v^2 = AE \cdot AB = kr^2\sqrt{1+\lambda}$ будет выражаться медиальной площадью.

3) Так как $AH \cdot HE = \frac{ED^2}{4}$ и меньший член $ED = kr$ соизмерим с $AB = r$, то произведение $uv = \sqrt{AH \cdot HE} \cdot AB = \frac{kr^2}{2}$ рационально.

Наконец, в предложении 59 Евклид доказывает, что произведение рациональной прямой на шестую биномиаль будет равно квадрату бимедиальной квадрирующей. Это произведение выразится в виде

$$r(r\sqrt{m} + r\sqrt{n}),$$

где мы предполагаем $m > n$, и распадается на две иррациональности

$$r^2\sqrt{m} \text{ и } r^2\sqrt{n}.$$

Мы хотим представить сумму этих иррациональностей в виде квадрата суммы $(x+y)^2$ двух других иррациональностей; для возможности решения мы должны иметь, что квадрат этой суммы

$(x+y)$ сводится к двум иррациональностям x^2+y^2 и $2xy$. Так как $x^2+y^2 > 2xy$, то получаем уравнения

$$x^2+y^2=r^2\sqrt{m},$$

$$xy=\frac{r^2\sqrt{n}}{2},$$

и дело сводится к решению квадратного уравнения

$$z^2-r^2\sqrt{m}\cdot z+\frac{r^4 n}{4}=0,$$

из которого определяются x^2 и y^2:

$$x^2=\frac{r^2\sqrt{m}}{2}+\frac{r^2}{2}\sqrt{m-n},$$

$$y^2=\frac{r^2\sqrt{m}}{2}-\frac{r^2}{2}\sqrt{m-n}.$$

Искомая иррациональность принимает вид

$$x+y=\frac{r}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{m-n}}+\sqrt{\sqrt{m}-\sqrt{m-n}}\right).$$

Мы получаем сумму двух несоизмеримых даже в степени медиалей, сумма квадратов которых $r^2\sqrt{m}$ и произведение $\frac{r^2\sqrt{n}}{2}$ являются медиальными, что и доказывает высказанное утверждение.

У Евклида доказательство развивается так. Он берёт произведение рациональной прямой $AB=r$ и шестой биномиали $AD=AE+ED=r\sqrt{m}+r\sqrt{n}$, оба члена которой будут линейно несоизмеримыми и между собой и с рациональной прямой $AB=r$.

Приложив к AE с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата на ED, он разбивает AD на два участка AH и HF, которые, согласно 18, x, будут несоизмеримы между собой. После этого искомая квадрирующая $MX=MN+NX=u+v$ определится при помощи уравнений

$$u^2=AH\cdot AB,\quad v^2=HE\cdot AB.$$

Члены её u и v будут несоизмеримы между собой даже в степени.

1) Так как $AE=r\sqrt{m}$ только в степени соизмерима с $AB=r$, то сумма квадратов $u^2+v^2=AE\cdot AB=r^2\sqrt{m}$ будет медиальной.

2) Поскольку $AH \cdot HE - \frac{ED^2}{4}$ и $ED = r\sqrt{n}$ будет только в степени соизмерима с $AB = r$, то произведение

$$u \cdot v = \sqrt{AH \cdot HE} \cdot AB = \frac{r\sqrt{n}}{2} \cdot r$$

будет тоже медиальным.

3) Наконец, из условия несоизмеримости AE и ED следует, что $u^2 + v^2 = AE \cdot AB$ и $uv = \frac{ED \cdot AB}{2}$ будут тоже несоизмеримыми между собой.

Все доказанные свойства являются характерными для бимедиально-квадрирующей иррациональной.

Если принять $AB = r = 1$, то все шесть высказанных предложений будут равносильны утверждению, что все шесть иррациональностей первой гексады могут быть получены извлечением квадратного корня из шести биномиалей. (*И. В.*)

48. Биномиали как результат возведения в квадрат иррациональностей первой гексады. Предложения 60—65 являются обратными по отношению к предложениям 54—59. Они открываются леммой, которая в нашем обозначении равносильна неравенству

$$x^2 + y^2 > 2xy.$$

Подлинность этой леммы несколько сомнительна потому, что Евклид уже пользовался ею при доказательстве предложения 44 книги X; как мы видели выше, она же молчаливо подразумевалась и при доказательстве предложения 59.

Доказательство этой леммы основывается на применении теоремы 5 книги II относительно деления на равные и неравные. Если $AB = x + y$ и $x > y$, то теорема 5, II запишется так:

$$xy + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

откуда следует:

$$xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

$$2xy < 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

Но, **согласно** 9, II,

$$x^2 + y^2 = 2\left\{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{2}\right)^2\right\}$$

и

$$x^2 + y^2 > 2\left(\frac{x+y}{2}\right)^2,$$

откуда и следует рассматриваемое неравенство.

В предложении 60 высказывается утверждение, что квадрат на биномиали, разделённый на рациональную прямую, даёт в частном первую биномиаль.

В алгебраическом обозначении доказательство этой теоремы имело бы следующий вид.

Пусть $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — биномиаль, r — некоторая рациональная прямая, которую для простоты можно было бы принять за единицу. Тогда

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}{r}=\frac{a+b}{r}+\frac{2\sqrt{ab}}{r}.$$

Так как, по только что доказанной лемме, $a+b>2\sqrt{ab}$, то $\frac{a+b}{r}$ будет больший член биномиали, получившийся в результате. Далее, так как a и b суть рациональные числа, то больший член будет соизмерим линейно с рациональной прямой. Наконец, квадрат большего члена $\frac{(a+b)^2}{r^2}$ превышает квадрат меньшего члена $\frac{4ab}{r^2}$ на

$$\frac{(a+b)^2-4ab}{r^2}=\left(\frac{(a-b)}{r}\right)^2=\left\{\left(\frac{a-b}{a+b}\right)\cdot\left(\frac{a+b}{r}\right)\right\}^2,$$

т. е. на величину, которая представляет квадрат прямой, соизмеримой с бо́льшим членом.

Доказательство Евклида развивается так. Он берёт биномиаль $AC+CB=\sqrt{a}+\sqrt{b}$ и рациональную прямую $DE=r$. К этой последней прямой он «прикладывает» площадь, равную квадрату на AB, иными словами, находит сторону DH прямоугольника, площадь которого равна AB^2, а другая сторона $DE=r$. Эту прямую он разбивает на части

$$DK=\frac{a}{r},\quad KM=\frac{b}{r},\quad MH=\frac{2\sqrt{ab}}{r}.$$

Последняя прямая делится им на две части $MN=NH=\frac{\sqrt{ab}}{r}$.

Далее, прямая $DM=\frac{a+b}{r}$ будет рациональной, линейно соизмеримой с r, а прямая MN, равная частному от деления медиальной площади на рациональную прямую, тоже будет рациональной в смысле Евклида, но уже не будет линейно соизмеримой с r. Таким образом, доказано, что $DM+MH$ будет биномиалью.

Остаётся доказать, что она будет первой биномиалью. Это доказательство разбивается на следующие этапы.

Сначала Евклид показывает, что $DK \cdot KM = MN^2$ или

$$\frac{ab}{r^2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2\sqrt{ab}}{r}\right)^2.$$

Затем, опираясь на вышепоказанную лемму, Евклид показывает, что первый член

$$DM = \frac{a+b}{r}$$

будет больше второго $MH = \frac{2\sqrt{ab}}{r}$.

После этого используется первая половина предложения 17 книги X. Если к большей прямой DM прикладывается с недостатком в виде квадрата прямоугольник $DK \cdot KM$, равный четверти квадрата меньшей прямой MH, причём отрезки DK и KM будут соизмеримы, то это значит, что большая сторона в квадрате, а именно DM^2, будет больше меньшей MH^2 на квадрат отрезка, соизмеримого с первой.

Когда же это доказано, то остаётся лишь показать, что бо́льший из двух рациональных, соизмеримых только в степени отрезков, а именно DM, будет линейно соизмерим с рациональной прямой $DE = r$, меньший же MH не будет с ней линейно соизмеримым; это непосредственно вытекает из доказанных в самом начале свойств отрезков DK, KM и MH.

В предложении 61 доказывается, что квадрат первой бимедиали даст вторую биномиаль, у которой квадрат бо́льшего члена будет больше квадрата меньшего на квадрат прямой, линейно соизмеримой с первым членом, причём меньший член будет соизмерим линейно с рациональной прямой.

Если мы возьмём выражение первой бимедиали в виде

$$r\sqrt[4]{k} + r\sqrt[4]{k^3},$$

то квадрат этого выражения будет:

$$r^2\{(1+k)\sqrt{k} + 2k\}.$$

Так как $(1+k)\sqrt{k} > 2k$, то больший член не будет линейно соизмерим с единицей (наша рациональная прямая DE), а меньший член $2k$ будет. Разность квадратов большего и меньшего членов может быть представлена в виде

$$k(1+k)^2 - 4k^2 = k(1-k)^2 = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^2 \{\sqrt{k}(1+k)\}^2.$$

Таким образом, обнаружены все свойства второй биномиали.

Доказательство Евклида идёт аналогично доказательству предыдущей теоремы.

К рациональной прямой DE «прикладывается» площадь DI, равная квадрату на AB, в результате чего получается сторона DH, которая разбивается на части

$$DK=\frac{AC^2}{DE}=\frac{(r\sqrt[4]{k})^2}{DE},\qquad KM=\frac{CB^2}{DE}=\frac{(r\sqrt[4]{k^3})^2}{DE},$$

$$MH=\frac{2\,AC\cdot CB}{ED}.$$

Так как квадраты AC^2 и BC^2 будут медиальными, то и площадь DL будет тоже медиальной, а частное от деления её на DE будет рациональной в смысле Евклида прямой, линейно несоизмеримой с DE. Далее, прямоугольник MI, равный $2AC\cdot CB$, будет по свойству первой бимедиали рациональным; значит, прямая

$$MH=\frac{2AC\cdot CB}{DE}$$

будет рациональной линейно соизмеримой с рациональной прямой DE. Таким образом, $DM+MH$ будет биномиалью, оба члена которой соизмеримы только в степени, и больший не будет линейно соизмеримым с рациональной прямой DE.

Для доказательства, что это будет вторая биномиаль, остаётся лишь обнаружить, что разность квадратов на DM и MH будет равна квадрату на прямой, линейно соизмеримой с DM. Показавши на основании леммы, что $DM>MH$, Евклид из соизмеримости медиальных площадей DG и KL заключает о соизмеримости отрезков DK и KM, а отсюда на основании первой половины 17, X заключает о том, что $DM^2-MH^2=(\lambda\cdot DM)^2$, где λ — некоторое рациональное число.

Остается лишь осветить один пункт, оставленный у Евклида в тени: почему отрезки DK и KM будут между собой соизмеримыми. Мы имеем.

$$DK=\frac{AC^2}{DE},\qquad KM=\frac{CB^2}{DE}.$$

Но по свойству первой бимедиали квадраты её членов AC^2 и CB^2 будут соизмеримы между собой; отсюда следует соизмеримость DK и KM.

В предложении 62 Евклид доказывает, что квадрат второй бимедиали (квадраты членов которой соизмеримы, а произведение медиально) даёт третью биномиаль.

Возьмем выражение для второй бимедиали в форме

$$\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt{b}.$$

Квадрат этого выражения будет:

$$\sqrt{a}+b\sqrt{a}+2\sqrt{ab}=(1+b)\sqrt{a}+2\sqrt{ab}.$$

Мы имеем два выражения, соизмеримых только в квадратах, каждое из которых не будет линейно соизмеримым с рациональной прямой, принятой за единицу. Чтобы убедиться в том, что мы имеем дело с третьей биномиалью, остаётся лишь показать, что разность квадратов

$$\{(1+b)\sqrt{a}\}^2-(a2\sqrt{ab})^2$$

представляет квадрат на прямой, соизмеримой с $(1+b)\sqrt{a}$.

Действительно, эту разность мы можем переписать в виде

$$a(1+2b+b^2)-4ab=a(1-b)^2=a\left\{\frac{(1-b)}{(1+b)}(1+b)\right\}^2=$$

$$=\left(\frac{1-b}{1+b}\right)^2\cdot\{\sqrt{a}(1+b)\}^2,$$

что и доказывает нашу теорему.

Доказательство Евклида состоит в следующем. Он берёт вторую бимедиаль $AC+CB$ и прикладывает к рациональной прямой DE площадь $DI=AB^2$, которая в результате деления на DE дает ширину DH. Эта ширина DH разбивается на отрезки

$$DK=\frac{AC^2}{DE},\quad KM=\frac{CB^2}{DE},\quad MH=\frac{2AC\cdot CB}{DE}.$$

По свойству бимедиали (соизмеримость AC^2 и CB^2) эти отрезки будут линейно соизмеримыми между собой, но вследствие медиальности площадей AC^2 и CB^2 ни сами они, ни их сумма DM не будут линейно соизмеримыми с рациональной прямой DE. Далее вследствие медиальности произведения $AC\cdot CB$ прямая $MH=\frac{2AC\cdot CB}{DE}$ будет рациональной, линейно несоизмеримой с DE. Затем вследствие несоизмеримости AC и CB будут несоизмеримы и AC^2 с $AC\cdot CB$ и CB^2 с $AC\cdot CB$, а следовательно, и прямые

$$DM=\frac{AC^2+CB^2}{DE}\quad\text{и}\quad MH=\frac{2AC\cdot CB}{DE}.$$

Таким образом, две рациональные линейно несоизмеримые прямые DM и MH составляют биномиаль.

Для доказательства, что мы имеем дело с третьей биномиалью, члены которой несоизмеримы с рациональной прямой, а разность квадратов обоих членов представляет квадрат на прямой, соизмеримой с бо́льшим членом, нам остаётся лишь доказать это последнее её свойство. Это можно сделать на основании первой части предложения 17: так как бо́льшая прямая DM распадается на два соизмеримых отрезка DK, KM, произведение которых равно четверти квадрата на меньшей прямой MH, то разность квадратов на DM и MH представляет квадрат на отрезке, соизмеримом линейно с бо́льшим членом DM.

В предложении 63 Евклид доказывает, что квадрат «большей» иррациональной (члены которой несоизмеримы в степени, причем сумма их квадратов рациональна, а произведение медиально) даёт четвёртую биномиаль (больший член которой соизмерим с рациональной прямой, а разность квадратов членов представляет квадрат на отрезке, несоизмеримом с бо́льшим членом).

Возьмем формулу большей иррациональной

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right).$$

Квадрат её будет:

$$\frac{a}{2}\left(2+2\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}}\right)=a\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right).$$

Мы получили биномиаль с рациональным бо́льшим членом. Разность квадратов обоих членов будет:

$$a^2-\frac{a^2}{1+k^2}-\frac{a^2k^2}{1+k^2}=\left(a\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2.$$

Выражение, стоящее под знаком квадрата, действительно представляет прямую, несоизмеримую с бо́льшим членом a.

Доказательство Евклида развивается так. Берётся «бо́льшая» иррациональность $AC+CB$ и рациональная прямая DE, к которой «прикладывается» площадь AB^2. Рассмотрим получающуюся прямую $\frac{AB^2}{DE}=DH$. Мы можем разбить эту прямую на отрезки

$$DK=\frac{AC^2}{DE},\qquad KM=\frac{CB^2}{DE},\qquad MN=NH=\frac{AC\cdot CB}{DE}.$$

Так как по свойству большей иррациональной сумма AC^2+CB^2 будет рациональна, то и сумма $DK+KM$ будет рациональной, линейно соизмеримой с DE, в то время как MN вследствие медиальности произведения $AC\cdot CB$ будет рациональной в смысле Евклида, но линейно несоизмеримой с рациональной прямой DE. Таким образом, $DM+MH$ будет биномиаль.

Чтобы убедиться в том, что DH есть четвёртая биномиаль, остаётся только доказать, что разность DM^2-MH^2 не будет равняться квадрату отрезка, линейно соизмеримого с DM. Это производится на основании предложения 18 книги X. Так как по свойству большей иррациональной AC^2 и CB^2 будут несоизмеримы, то значит, и отрезки DK, KM большего члена не будет линейно между собой соизмеримыми; если же мы прикладываем к DM с недостатком в виде квадрата площадь $DK\cdot KM=\left(\frac{MH}{2}\right)^2$ и отрезки DK, KM не будут линейно соизмеримы, то разность квад-

ратов $DM^2 - MH^2$ не будет представлять квадрата на прямой, соизмеримой с DM.

В предложении 64 доказывается, что квадрат рационально- и медиально-квадрирующей (сумма квадратов обоих членов медиальна, а произведение рационально, и оба члена несоизмеримы между собой даже в квадратах) даёт пятую биномиаль (у которой линейно соизмеримый с рациональной прямой будет меньший член).

Выражение для рационально- и медиально-квадрирующей мы имели в виде

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\,\frac{1}{\sqrt[4]{1-k^2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}+\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right).$$

Квадрат этой величины будет:

$$\frac{a}{2}\,\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\left(2+2\sqrt{1-\frac{k^2}{1+k^2}}\right)=\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}+\frac{a}{1+k^2}.$$

Мы получили биномиаль с рациональным меньшим членом. Для доказательства, что мы имеем дело с пятой биномиалью, нам остаётся лишь убедиться, что разность квадратов обоих членов представляет квадрат на прямой, линейно несоизмеримой с большей прямой $\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}$. Действительно,

$$\frac{a^2}{1+k^2}-\frac{a^2}{(1+k^2)^2}=\frac{a^2k^2}{(1+k^2)^2}=\left(\frac{a}{\sqrt{1+k^2}}\cdot\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2.$$

Доказательство Евклида протекает совершенно аналогично доказательству предыдущей теоремы, вся разница будет заключаться лишь в том, что теперь сумма квадратов AC^2+CB^2 будет медиальна, а произведение $AC\cdot CB$ рационально.

Наконец, в предложении 65 доказывается, что квадрат бимедиально-квадрирующей (у которой медиальны и сумма квадратов, и произведение обоих членов) даст шестую биномиаль (у которой оба члена не будут линейно соизмеримы с рациональной прямой).

Возьмём выражение для бимедиально квадрирующей, которое мы представили в виде:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{1+k^2}}\left(\sqrt{\sqrt{1+k^2}+k}+\sqrt{\sqrt{1+k^2}-k}\right),$$

квадрат этого выражения будет:

$$\frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1-k^2}}\left(2\sqrt{1+k^2}+2\sqrt{(1+k^2)-k^2}\right)=\sqrt{ab}+\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{1+k^2}}.$$

Мы имеем биномиаль, оба члена которой несоизмеримы линейно ни между собой, ни с рациональной прямой, равной единице. Для доказательства, что мы имеем дело с шестой биномиалью, остаётся лишь показать, что разность квадратов обоих членов будет представлять квадрат на прямой, линейно несоизмеримой с бо́льшим членом $\sqrt{ab}$. Действительно, эта разность квадратов будет:

$$ab - \frac{ab}{1+k^2} = \frac{ab \cdot k^2}{1+k^2} = \left(\sqrt{ab} \cdot \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right)^2.$$

Евклидово доказательство развивается совершенно аналогично доказательствам пяти предшествующих теорем. Разница заключается лишь в том, что теперь ему приходится подчеркнуть, что по свойству бимедиально-квадрирующей сумма квадратов $AC^2 + CB^2$ не будет линейно соизмерима с $2AC \cdot BC$; это обстоятельство и позволяет ему утверждать, что линия

$$DM + MH = \frac{AC^2 + CB^2}{DE} + \frac{2AC \cdot CB}{DE}$$

состоит из двух рациональных в смысле Евклида линейно несоизмеримых членов, т. е. представляет биномиаль. То, что эта биномиаль будет шестой, вытекает из предложения 18, X и того обстоятельства, что AC^2 и CB^2, а следовательно, и отрезки $DK = \frac{AC^2}{DE}$ и $KM = \frac{CB^2}{DE}$ не будут между собой линейно соизмеримы. (*И. В.*)

49. Соизмеримость иррациональностей одного класса. *Предложения 66—70 имеют целью показать, что прямые, линейно* соизмеримые иррациональности какого-нибудь класса, будут и сами представлять иррациональности того же класса.

В античных схолиях эти предложения вводятся следующим замечанием (Heiberg, т. V, № 310, стр. 547—548):

«Седьмая глава, в которой рассуждается о соизмеримости шести иррациональных, полученных путём сложения, показывающая, что каждая соизмеримая будет одинакового с ней вида».

Изложенные у Евклида доказательства не требуют особых комментариев. С нашей точки зрения доказательство будет заключаться в том, что, умножая оба члена иррациональности на рациональное число λ, мы не меняем отношений их ни друг к другу, ни к рациональной прямой. (*И. В.*)

50. Иррациональности, получаемые в результате сложения площадей различных типов. *Предложения 71 и 72* вводятся у схолиастов следующим замечанием (Heiberg, т. V, № 353, стр. 551):

«Восьмая глава, ясно обнаруживающая из сложения рациональной и медиальной или двух медиальных площадей ту разницу,

которую имеют между собой ⟨получающиеся⟩ в результате сложения иррациональности, а также выводящая их различие из тех площадей, которые ими квадрируются».

В предложении 71 рассматриваются иррациональности, возникающие при сложении рациональных и медиальных площадей. Если складываются такие две площади, то квадрирующая площади, полученной в результате их сложения, будет или биномиалью, или первой бимедиалью, или «большей» рациональной, или, наконец, рационально- и медиально-квадрирующей.

Если через r обозначить рациональную длину, то рациональная площадь $AB = kr^2$, медиальная же $CD = \sqrt{\lambda} \cdot r^2$, где k и λ суть рациональные числа. Требуется определить, какую иррациональность представляет квадрирующая

$$\sqrt{kr^2 + \sqrt{\lambda} r^2} = r\sqrt{k + \sqrt{\lambda}}.$$

Пусть сначала $k > \sqrt{\lambda}$. К рациональной прямой $EI = r$ «прикладываем» площадь $AB = kr^2$; получится ширина

$$EG = kr;$$

прикладывая к той же прямой площадь GI, равную площади CD, получаем ширину

$$GK = \sqrt{\lambda} \cdot r.$$

Из этих ширин EG будет соизмерима с r линейно, GK же — лишь в степени; поскольку обе они рациональны в смысле Евклида, то полученная прямая

$$EG + GK = kr + \sqrt{\lambda} r$$

будет биномиалью с бо́льшим членом $EG = kr$.

Если $k^2 - \lambda = (\mu k)^2$, где μ — рациональное число, то полученная прямая EK будет первой биномиалью; по предложению же 54 прямая, квадрирующая площадь $r(kr + \sqrt{\lambda} r)$, будет биномиалью.

Если же $k^2 - \lambda$ не будет равняться квадрату соизмеримого с k числа, то полученная прямая будет четвёртой биномиалью, а квадрирующая соответствующей площади по предложению 57 будет бо́льшей иррациональной.

Аналогичные рассуждения покажут, что если $k < \sqrt{\lambda}$, то в полученной биномиали EH будет соизмерим с рациональной прямой меньший член, что при различных предположениях относительно $\lambda - k^2$ может привести или ко второй, или к пятой биномиалям, которые после приложения к $EI = r$ дадут начало

площадям, квадрируемым или первой бимедиалью, или же рационально- и медиально-квадрирующей.

В предложении 72 рассматриваются квадрирующие для суммы медиальных площадей вида

$$\sqrt{\sqrt{\lambda}\cdot r^2+\sqrt{\mu}\cdot r^2}.$$

Аналогично предыдущей теореме строим прямые

$$EG=\sqrt{\lambda}\cdot r,$$
$$GK=\sqrt{\mu}\cdot r.$$

Вследствие несоизмеримости составляемых площадей $\sqrt{\lambda}\cdot r^2$ и $\sqrt{\mu}\cdot r^2$ и EG с GK будут несоизмеримы как между собой, так и с рациональной $EI=r$. Сумма отрезков $EG+GK$ будет биномиалью; в зависимости от того, будет ли $\lambda-\mu$ равняться или нет квадрату на прямой, соизмеримой с λ, мы получим третью или шестую биномиаль. Тогда квадрирующая площади EI, EK будет в первом случае второй бимедиалью, во втором же бимедиально-квадрирующей.

После предложения 72 идёт заканчивающее вторую часть книги X (предложения 36—72) заключение, имеющее своей целью показать, что все шесть типов биномиали будут различными между собой, все шесть иррациональностей первой гексады будут принадлежать к различным типам, не выражающимся через рационали и медиали. (*И. В.*)

51. Основные свойства евклидовых иррациональных. Группа теорем X книги *алгебраически* истолковывается как совокупность правил действий над иррациональными числами.

Конечно, верно, что, арифметизируя геометрию, можно вывести из евклидовых теорем *правила* действия над иррациональными.

Но следует хорошо помнить, что Евклид мыслил не иррациональными числами, а иррациональными прямыми и площадями, и при этом понимал *рациональность* в более широком смысле, чем мы, так что $\sqrt{\alpha}$ у него являлся рациональным; затем Евклид менее всего был заинтересован приемами вычисления, а только *построением* и изучением свойств иррациональных.

Переводя теорему 54 Евклида на алгебраический язык (конечно, с некоторым её искажением), можно сказать, что она обнаруживает, что $\sqrt{A\quad\sqrt{B}}$, где A и B — рациональные числа, в предположении, что B^2-A квадрат, приводится к сумме двух квадратных корней из рациональных чисел C и D.

Как определяются C и D? Это Евклида интересовало лишь постольку, поскольку это нужно для доказательства этого свойства иррациональных, но верно то, что его вывод раскрывает путь в вычислительную математику, от которой Евклид уклоняется.

Наиболее важные результаты я выражу сперва в словесной табличке.

Извлечение корня из	*даёт*:
первой биномиали	биномиаль
второй биномиали	первую бимедиаль
третьей биномиали	вторую бимедиаль
четвёртой биномиали	бо́льшую
пятой биномиали	рационально- и медиально-квадрирующую
шестой биномиали	бимедиально-квадрирующую
Возведение в квадрат	*даёт*:
биномиали	первую биномиаль
первой бимедиали	вторую биномиаль
второй бимедиали	третью биномиаль
большей	четвёртую биномиаль
рационально- и медиально-квадрирующей	пятую биномиаль
бимедиально-квадрирующей	шестую биномиаль

Взаимная таблица

Извлечение корня из	*даёт*:
первого вычета	вычет
второго вычета	первый медиальный вычет
третьего вычета	второй медиальный вычет
четвёртого вычета	меньшую
пятого вычета	образующую с рациональным медиальное
шестого вычета	образующую с медиальным медиальное
Возведение в квадрат	*даёт*:
вычета	первый вычет
первого медиального вычета	второй вычет
второго медиального вычета	третий вычет
меньшей	четвёртый вычет
образующей с рациональным медиальное	пятый вычет
образующей с медиальным медиальное	шестой вычет

52. Геометрические примеры иррациональных. Я уже указал, что в «Началах» Евклида выявляется определённое *целеустремление*.

Всё направляется к основной теме: к изучению *правильных тел*. Исследуя X книгу, следует иметь в виду всегда приложение её результатов в XIII книге «Начал».

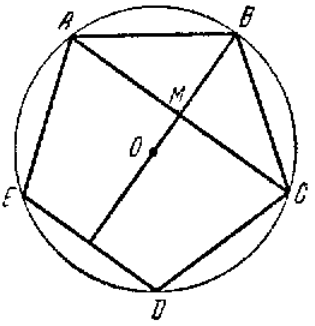
При изучении правильного *пятиугольника* как *грани додекаэдра* Евклид применяет предложения 6, 9, 74 книги X. Он доказывает (предложение 11), что сторона AB правильного пятн-

угольника $ABCDE$, вписанного в круг, есть *меньшая рациональная*. В ходе вывода он указывает, что отрезок BM перпендикуляра из B, опущенного на сторону ED, отсекаемый диагональю AC, представляет *четвёртый вычет* (черт. 21).

В предложении 16 Евклид доказывает, что сторона вписанного в шар *икосаэдра* — тоже *меньшая иррациональная*.

В предложении 17 он доказывает, что сторона додекаэдра представляет *вычет*.

Но вообще следует отметить, что книга X использована не в той мере, в какой она могла бы быть использована в этом направлении.



Черт. 21

То, что являлось до Евклида только *средством*, уже во времена Евклида обратилось в цель; иррациональные величины стали исследоваться независимо от приложения их к теории многогранников.

Папп[40]) даёт другие примеры меньшей иррациональной и образующей с рациональной медиальное.

53. Мавролик[41]) и первый шаг к арифметизации X книги «Начал». Уже в комментариях к арифметическим книгам мы упоминали о том значении, которое имел Мавролик в истории арифметизации, шедшей через несколько веков.

Упомянем прежде всего его первое положение: *то, что имеет место для отношений, пропорций, соизмеримости и подобия чисел, линий, площадей и тел, имеет место и для величин всякого рода.*

Второе его положение говорит, что *всякое сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение корней можно производить с помощью означающих величины чисел*[42]).

Здесь, конечно, ещё не устанавливается взаимно однозначное соответствие между геометрическими величинами и числами, но вне сомнения уже мыслятся глухие числа. *Иррациональные величины* Евклида превращаются в *иррациональные числа*.

Мавролик даёт другую, уже несколько *арифметизированную формулировку* предложений X книги, хотя целиком ещё не отказывается от евклидовой терминологии.

Он складывает, вычитает, умножает и делит иррациональные.

Он говорит (предложение 65): всякая иррациональная величина (которую, впрочем, он ещё не называет *числом*), делясь на рациональную, даёт в частном одноимённую и с ней соизмеримую величину.

---

[40]) Pappus, Collectiones, ed. Fr. Hultsch, Berlin, 1876—1878

[41]) M. Cantor, Vorles., Bd. II, гл. 69.

[42]) Borelli, Euclides restitutus, Pisa, 1658.

Предложение 101 его книги может быть выражено формулой

$$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta-\gamma}(\sqrt{\beta}-\sqrt{\gamma})=\frac{\sqrt{\alpha\cdot\beta}-\sqrt{\alpha\cdot\gamma}}{\beta-\gamma}.$$

Бесспорно, что этот сдвиг в понимании самой сущности иррационального увлекает Мавролика значительно *дальше* Евклида.

Ведь Евклид может рассматривать только $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^2$, так как $(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})^4$ уже теряет геометрический смысл. Мавролик же даёт теорему (предложение 94): всякая иррациональная величина как из бимедиальных, так и из резидуальных (т. е. средних вычетов), иррациональна не только по своей величине, но и в степени, т. е. иррациональна не только $(\sqrt[4]{\alpha}\pm\sqrt[4]{\beta})$, но и $(\sqrt[4]{\alpha}\pm\sqrt[4]{\beta})^2$, причём то же относится и ко второму квадрату $(\sqrt[4]{\alpha}\pm\sqrt[4]{\beta})^4$, и к третьему $(\sqrt[4]{\alpha}\pm\sqrt[4]{\beta})^8$, и т. д.

Такая же теорема устанавливается для биномиали и вычета (предложение 45).

Мавролик исследует не только произведение степенно-рациональных на биномиали и вычеты, но и медиали (средней) на бимедиаль и частное от деления степенно-рационального на биномиаль и вычет и т. д.

Он доказывает, что при делении в крайнем и среднем отношении обе части являются биномиалями, причём бо́льшая — пятой, меньшая — первой. В этом нетрудно убедиться, замечая, что пропорция

$$a:x=x:(a-x)$$

даёт уравнение

$$x^2+ax-a^2=0,$$

которое имеет корни

$$x=\frac{a}{2}(\sqrt{5}-1)$$

и

$$(a-x)=\frac{a}{2}(3-\sqrt{5}).$$

Нетрудно видеть, что меньшая часть является пятой биномиалью.

Он дальше производит такое же деление над частями и получает для большей части первой $\frac{a}{4}(3-\sqrt{5})^2$ тоже пятую биномиаль, а для меньшей второй $\frac{a}{4}(\sqrt{5}-1)^2$ тоже первую биномиаль.

Мавролик безусловно опережает своё время. Последователя себе он находит только в XVII в. в лице Борелли.

54. Кардан и иррациональные Евклида. Интересно отметить, что при довольно высоком развитии *числовой* алгебры и даже при *буквенной* алгебре остаётся евклидова классификация иррациональностей.

Мы находим её и у Кардана (который уже определённо мыслит иррациональные как глухие числа). Мы находим её и у Стевина[43]), который выставляет все 6 биномиалей и 6 вычетов Евклида, разъясняя их алгебраически:

$$\overset{1}{b} = a + \sqrt{b}, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ рац.},$$
$$\overset{2}{b} = \sqrt{a} + b, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ рац.},$$
$$\overset{3}{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ рац.},$$
$$\overset{4}{b} = a + \sqrt{b}, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ иррац.},$$
$$\overset{5}{b} = \sqrt{a} + b, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ иррац.},$$
$$\overset{6}{b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}, \quad \text{где } \sqrt{a^2 - b} \text{ иррац.}$$

Но вместе с биномиалями у него фигурируют и мультиномы.

Во всяком случае у Кардана иррациональные Евклида — уже *числа*. Теорию иррациональных радикальных числовых выражений он развивает *арифметически*. Он не отклоняется от X книги «Начал», но проводит *сравнение* иррациональных, которое развивает алгебра иррациональных Евклида.

Кардан останавливается на ошибке Луки Пачиоли[44]), предполагавшего, что все *иррациональные сводятся к средним*.

Для него ясна приводимость многих иррациональных, с которыми оперирует Алгебра, к иррациональным Евклида.

55. Внесение в алгебру иррациональных, зависящих от радикалов высших степеней. Как бы далеко ни шли за «Начала» Евклида античные исследования Аполлония[45]), а может быть, и других, они не оказывают большого влияния на развитие теории иррациональных.

На заре европейской алгебры Лука Пачиоли не выходит за пределы — правда уже арифметизированных — проблем X книги «Начал».

Значительно дальше идёт в конце XV в. Шюкэ. Впрочем, операции над кубическими корнями мы находим ещё у арабов. Алькархи даёт пример $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{16}$, а Леонардо Пизан-

---

[43]) Stevin, Les oeuvres mathématiques par A. Girard, Leyde, 1634.

[44]) См. примеч. 17.

[45]) Woepke, Acad. Sc. Mém. présent., XIV, 1856, стр. 658.

ский[46]), идя по пути арабской алгебры, даёт примеры

$$\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{54}=\sqrt[3]{250},$$
$$\sqrt[3]{54}-\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{2},$$
$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{32}=3\sqrt[3]{4}.$$

Последняя формула нами совершенно просто выводится так:

$$\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{8\cdot 4}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{4}=2\sqrt[3]{4},$$
$$\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{32}=3\sqrt[3]{4}.$$

Но Леонардо даже при выводе этой формулы видит большие затруднения вследствие незнания такой простой операции, как *вынесения множителя за знак корня.*

Им выводится формула

$$\sqrt{a}\pm\sqrt{b}=\sqrt{a+b\pm 2\sqrt{ab}}.$$

Рудольф идёт дальше и выводит, что

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}=\sqrt[3]{a+b+3\,(\sqrt[3]{a})^2\sqrt[3]{b}+3\sqrt[3]{a}(\sqrt[3]{b})^2}.$$

56. Третья гексада иррациональностей. Предложения 73—85 представляют аналогию с предложениями 36—47, трактующими об иррациональностях, получаемых путём сложения; только теперь сложение заменяется вычитанием. Античные схоластики вводят предложение 73 следующим замечанием (Heiberg, t. V, № 359, стр. 553):

Девятая глава, излагающая шесть иррациональностей, получаемых вычитанием, подобно 6 иррациональностям, получаемым сложением; например, биномиали ⟨соответствует⟩ вычет; действительно, из каких ⟨величин⟩ составилась та, из таких же появилась и эта путём вычитания меньшей из большей; первой бимедиали ⟨соответствует⟩ первый медиальный вычет, точно так же и для остальных; для них же он доказывает, что каждой соответствует только одна сопрягающаяся».

Получающиеся шесть иррациональностей будут иметь вид:

вычет: $$\sqrt{a}-\sqrt{b}\qquad(a>b);$$

первый медиальный вычет:

$$\sqrt[4]{a}-k\sqrt{a}\sqrt[4]{a}\qquad\text{или}\qquad k\sqrt{a}\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a};$$

---

[46]) См. примеч. 3.

второй медиальный вычет:

$$\sqrt[4]{a}-k\sqrt{b}\sqrt[4]{a} \quad \text{или} \quad k\sqrt{b}\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{a};$$

меньшая иррациональная:

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right);$$

образующая с рациональным целое медиальное:

$$\sqrt{\frac{a}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{1+k^2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right);$$

образующая с медиальным целое медиальное:

$$\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{1+k^2}}\left(\sqrt{1+\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}-\sqrt{1-\frac{k}{\sqrt{1+k^2}}}\right).$$

Предложение 73 Евклид доказывает аналогично 36.

Из линейной несоизмеримости $AB=\sqrt{a}$ и $BC=\sqrt{b}$ следует несоизмеримость $(\sqrt{a})^2$ и $\sqrt{ab}$, а вследствие соизмеримости a и b оказывается, что $a+b$ будет несоизмеримо с $2\sqrt{ab}$. Поскольку же

$$a+b=2\sqrt{ab}+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2,$$

то и $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2=AC^2$ будет несоизмерима с $AB^2+BC^2=a+b$. Так как $a+b$ рационально, то AC^2, а значит, и AC будут иррациональны.

Предложение 74 доказывается аналогично 37.

Пусть из медиали AB отнимается медиаль BC, соизмеримая с AB в степени и дающая рациональное произведение $AB\cdot AC$; требуется доказать, что разность $AC=AB-BC$ будет иррациональна.

Так как AB^2 и BC^2 представляют медиальные площади, то AB^2+BC^2 несоизмеримо с $2AB\cdot BC$, а значит, и $(AB-BC)^2$ будет несоизмерима с рациональной площадью $2AB\cdot BC$; таким образом, прямая $AB-BC=AC$ будет иррациональна.

В предложении 75, так же как и в аналогичном ему 38, произведение $AB\cdot BC$ будет медиальным. Для доказательства, что AC^2, а следовательно, и AC будут иррациональными, нужно построить рациональную величину и показать несоизмеримость её с AC^2 или AC [в предыдущих предложениях такой величиной были или сумма квадратов AB^2+BC^2 (предложение 73), или удвоенное произведение $2AB\cdot BC$ (предложение 74)]. Берём

рациональную прямую DI и находим частные

$$DH=\frac{AB^2+BC^2}{DI},\quad DZ=\frac{2AB\cdot BC}{DI}.$$

Нетрудно видеть, что

$$DH-DZ=\frac{AC^2}{DI}.$$

Далее, вследствие медиальности площадей (AB^2+BC^2) и $2AB\cdot BC$ прямые DH и DZ будут рациональными в смысле Евклида и линейно несоизмеримыми с DI. Затем, вследствие того, что AB и BC соизмеримы только в степени, будут несоизмеримыми площади AB^2 и $AB\ BC$, а значит, и (AB^2+BC^2) с $2AB\cdot BC$; отсюда следует, что DH и DI будут линейно несоизмеримыми прямыми, рациональными в смысле Евклида; значит, их разность по предложению 73 будет представлять вычет, т. е иррациональную величину. Отсюда же получается, что иррациональной будет и AC^2, а значит, и AC.

В предложении 76, аналогичном 39, доказывается иррациональность «меньшей» иррациональности $AC=AB-BC$, где AB и BC суть несоизмеримые даже в степени медиали, обладающие тем свойством, что AB^2+BC^2 рационально, а $2AB\cdot BC$ медиально.

Из несоизмеримости

$$\frac{AB^2+BC^2}{2AB\cdot BC}$$

вытекает при помощи производной пропорции несоизмеримость

$$\frac{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC}{AB^2+BC^2}=\frac{AC^2}{AB^2+BC^2},$$

а значит, и иррациональность AC^2 и AC.

В предложении 77 аналогично трактуется случай, когда $AB\cdot BC$ рационально, а AB^2+BC^2 медиально, теперь из несоизмеримости

$$\frac{AB^2+BC^2}{2AB\cdot BC}$$

следует несоизмеримость

$$\frac{AB^2+BC^2-2AB\cdot BC}{2AB\cdot BC}=\frac{AC^2}{2AB\cdot BC}.$$

В предложении 78, где AB^2+BC^2 и $AB\cdot BC$ обе медиальны и несоизмеримы, приходится опять, как и в предложении 41, прибегать к приложению площадей.

Строим прямые

$$DH=\frac{AB^2+BC^2}{DI},\quad DZ=\frac{2AB\cdot BC}{DI}.$$

Обе эти прямые будут рациональными и между собой линейно несоизмеримыми. Это значит, что их разность

$$ZH = \frac{(AB - BC)^2}{DI}$$

будет вычетом. Так как на основании предложения 20 произведение $ZH \cdot DI$ — иррациональной прямой на рациональную — будет само иррационально, то значит, иррациональной будет и AC^2, а следовательно, и AC.

Следует отметить, что в формулировках предложений 77 и 78 слова «образующая с рациональным (медиальным) целое медиальное» нужно понимать как прямую, квадрат на которой будет равен разности рациональной и медиальной, или, соответственно, двух медиальных площадей.

Предложения 79—84 представляют аналогию с предложениями 42—47 и доказываются они аналогичным образом. Идея доказательства предложений 79, 80, 82, 83 состоит в том, что если с данной прямой AB сочетаются две прямые BC и BD, то мы имеем:

$$AB = AC - CB = AD - DB.$$

Возведя в квадрат эти равенства, получим:

$$AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB,$$

откуда

$$AC^2 + CB^2 - (AD^2 + DB^2) = 2AC \cdot CB - 2AD \cdot DB.$$

Поскольку же в одной части этого равенства стоит разность рациональных величин, а в другой — разность медиальных, то эти равенства возможны лишь при $AC = AD$ и $BC = BD$.

Для истории терминологии интересно отметить употребление ἐναλλὰξ = permutando = перестановкой. Обычно этим термином обозначается операция получения из

$$a : b = c : d$$

пропорции

$$a : c = b : d.$$

В предложениях 79 и 80 этим же термином обозначается переход от равенства

$$a - b = c - d$$

к равенству

$$a - c = b - d.$$

В предложениях 81 и 84, где и сумма квадратов обеих прямых и произведение их являются одновременно медиальными, пришлось прибегнуть к операции приложения обеих площадей к рациональной прямой, после чего доказательство сводится к применению предложения 79.

В деталях ход доказательства предложений 81 и 84 имеет следующий вид.

Пусть AB — исследуемая иррациональность (второй медиальный вычет или образующая с медиальным целое медиальное), BC — сочетающаяся с ней прямая; обе прямые AC, CB или совсем несоизмеримы (предложение 84), или соизмеримы только в степени.

Берём рациональную прямую EZ и строим выражения

$$EM = \frac{AC^2 + CB^2}{EZ}, \quad GM = \frac{2AC \cdot CB}{EZ}.$$

Так как и сумма квадратов и удвоенное произведение будут по условию медиальными площадями, то EM и GM будут рациональными несоизмеримыми с EZ линейно прямыми.

Далее, разность площадей EH и GH есть EL:

$$AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB = AB^2, \text{ т. е. } EL = AB^2.$$

Предположим теперь, что с AB сочетается другая прямая BD, причём прямые AD, DB обладают теми же свойствами, что AC и CB. Строим выражение

$$EN = \frac{AD^2 + BD^2}{EZ} = \frac{\text{площ. } EI}{EZ}.$$

Имеем:

$AD^2 + BD^2 - AB^2 = 2AD \cdot DB$, т. е. площ. EI — площ. $EL =$ $=$ площ. GI; это значит, что

$$\frac{\text{площ. } GI}{EZ} = \frac{2AD \cdot DB}{EZ} = GN.$$

Рассматриваем два выражения

$$EG = EM - GM \text{ и } EG = EN - GN.$$

Так как AC и BC линейно несоизмеримы друг с другом, то $AC^2 + BC^2$ и $2AC \cdot CB$ тоже будут несоизмеримы друг с другом; это значит, что EM и GM представляют две рациональные несоизмеримые между собой линейно прямые, а следовательно, их разность $EG = EM - GM$ будет вычетом, равно как и разность $EN - GN$. Как мы видим теперь, с вычетом EG сочетаются две прямые GM и GN, что невозможно согласно предложению 79. (*И. В.*)

57. Четвёртая гексада иррациональностей. Предложения 85—90, устанавливающие различные виды вычетов, аналогичны предложениям 48—53, дающим различные виды биномиалей; единственная разница заключается лишь в том, что вместо плюса для биномиалей будет для вычетов стоять минус.

Формулы шести видов вычетов будут следующие.

Первый вычет: $kr - kr\sqrt{1 - \lambda^2}$.

Второй вычет: $kr\dfrac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2}} - kr$.

Третий вычет: $\sqrt{k}\cdot r-\sqrt{k}\cdot r\sqrt{1-\lambda^2}$.

Четвёртый вычет: $kr-kr\dfrac{1}{\sqrt{1+\lambda}}$.

Пятый вычет: $kr\sqrt{1+\lambda}-kr$.

Шестой вычет: $r\sqrt{m}-r\sqrt{n}\quad(m>n)$.

Обозначения остаются теми же, что и в комментарии 47: r обозначает рациональную прямую, m, n и $\lambda=\dfrac{n}{m}$ суть рациональные числа, так же как и k.

Поскольку входящие в состав вычетов члены тождественны с разбиравшимися нами в комментарии 47, мы можем опустить современный способ доказательства рассматриваемых шести теорем (он будет тождествен доказательству аналогичных шести теорем в предложениях 48—53) и ограничиться лишь изложением доказательства у Евклида.

Предложение 85 даёт способ построения первого вычета, у которого уменьшаемое соизмеримо линейно с рациональной прямой и разность квадратов уменьшаемого и вычитаемого равна квадрату на прямой, линейно соизмеримой с уменьшаемым.

Берём рациональную прямую $A=r$ и линейно с ней соизмеримую прямую $BH=kr$. Затем берём два квадратных числа $DE=m^2$ и $EI=n^2$, разность которых $DI=m^2-n^2$ не представляет точного квадрата.

Первый член вычета $BH=kr$ уже определён; для построения второго HC составляем пропорцию

$$ED:DI=BH^2:HC^2,$$

т. е.

$$m^2:(m^2-n^2)=(kr)^2:HC^2.$$

Поскольку m и n суть рациональные числа, то $kr=BH$ и HC будут тоже рациональными числами, соизмеримыми только в степени; это показывает, что

$$BC=BH-HC=kr-kr\sqrt{1-\lambda^2}$$

будет вычетом.

Для доказательства, что он будет первым, составляем разность квадратов

$$BH^2-HC^2=G^2$$

или

$$m^2:(m^2-n^2)=BH^2:HC^2.$$

Так как $BH^2=HC^2+G^2$ и $m^2=(m^2-n^2)+n^2$, то из пропорции

$$\frac{(m^2-n^2)+n^2}{m^2-n^2}=\frac{HC^2+G^2}{HC^2}$$

путём «переворачивания» (19, V, следствие) находим:

$$\frac{(m^2-n^2)+n^2}{n^2}=\frac{HC^2+G^2}{G^2}$$

или

$$BH^2:G^2=m^2:n^2.$$

Отсюда видно, что

$$G^2=BH^2-HC^2$$

будет равняться $\left(\frac{n}{m}BH\right)^2$, т. е. будет представлять квадрат на прямой $\frac{n}{m}BH=\lambda BH$, что и характеризует первый вычет.

В предложении 86 даётся способ построения второго вычета, для которого соизмеримым с рациональной прямой будет вычитаемое.

Берём рациональную прямую $A=r$ и линейно с ней соизмеримую $HC=kr$; затем берём два квадратных числа $DE=m^2$ и $EI=n^2$, разность которых $DI=m^2-n^2$ не представляет точного квадрата. Первый член BH вычета определится из пропорции

$$\frac{m^2-n^2}{m^2}=\frac{CH^2}{BH^2}.$$

Мы видим, что BH и CH представляют два рациональных в смысле Евклида числа, соизмеримых только в степени; их разность

$$BC=\frac{m}{\sqrt{m^2-n^2}}kr-kr=\frac{k}{\sqrt{1-\lambda^2}}r-kr$$

представляет вычет.

Для доказательства, что он будет вторым, составляем разность квадратов BH и CH:

$$G^2=BH^2-CH^2.$$

Из пропорции

$$BH^2:CH^2=ED:DI \quad m^2:(m^2-n^2)$$

путём «переворачивания» получаем:

$$BH^2:G^2=m^2:n^2,$$

т. е.

$$G^2=\left(\frac{n}{m}BH\right)^2=(\lambda\cdot BH)^2.$$

Так как вычитаемое $CH=kr$ будет линейно соизмеримым с рациональной прямой r, то отсюда следует, что $BC=BH-CH$ представляет второй вычет.

В предложении 87 отыскивается третий вычет, в котором ни уменьшаемое, ни вычитаемое не будут линейно соизмеримыми с рациональной прямой $A = r$. Берём три числа $E = a$, $BC = b$, $CD = c$, не стоящие между собой в отношении квадратных чисел, но для которых отношение $b:(b - c)$ равняется квадратному числу. Построим две прямые IH и HG, пользуясь пропорциями

$$E:BC = A^2:IH^2, \quad BC:CD = IH^2:HG^2,$$

откуда

$$IH = r\sqrt{\frac{b}{a}},$$

$$HG = r\sqrt{\frac{b}{a}}\sqrt{\frac{c}{b}} = r\sqrt{\frac{c}{a}}.$$

Мы видим, что IH будет рациональным в смысле Евклида отрезком, линейно несоизмеримым с рациональной прямой r. Точно так же и HG будет рациональным отрезком, несоизмеримым линейно ни с IH, ни с $A = r$. Значит, разность $IH - HG = IG$ будет вычетом.

Остаётся доказать, что мы имеем дело с третьим вычетом, для которого разность квадратов уменьшаемого и вычитаемого будет представлять попрежнему квадрат на прямой, линейно соизмеримой с уменьшаемым, и оба члена — уменьшаемое и вычитаемое — будут линейно несоизмеримы с r. Из пропорций

$$E:BC = A^2:IH^2 \quad \text{или} \quad a:b = r^2:IH^2,$$

$$BC:CD = IH^2:HG^2 \quad \text{или} \quad b:c = IH^2:HG^2$$

легко устанавливаем при помощи преобразования «по равенству», что HG не будет линейно соизмерима с r.

Составляем теперь квадрат разности квадратов IH и HG

$$K^2 = IH^2 - HG^2.$$

Поскольку

$$IH^2:HG^2 = BC:CD = b:c,$$

то путём «переворачивания» находим:

$$IH^2:K^2 = b:(b - c).$$

Так как по условию отношение $\frac{b}{b-c}$ выражается квадратным числом, то K будет линейно соизмеримым с IH и, значит, будет выполнено второе условие существования третьего вычета.

Для трёх остальных вычетов разность квадратов уменьшаемого и вычитаемого не будет представлять квадрата на прямой, соизмеримой линейно с уменьшаемым.

В предложении 88 даётся способ построения четвёртого вычета, для которого уменьшаемое будет линейно соизмеримо с рациональной прямой $A=r$, пусть оно выражается отрезком $BH=kr$. Берём два числа $DI=a$ и $IE=b$, удовлетворяющие требованию, чтобы отношения

$$\frac{DI+IE}{DI}=\frac{a+b}{a}, \quad \frac{DI+IE}{IE}=\frac{a+b}{b}$$

не выражались отношениями квадратных чисел. Вычитаемое HC определится из пропорции

$$DE:EI=BH^2:HC^2,$$

откуда

$$HC=BH\sqrt{\frac{b}{a+b}}.$$

Мы видим, что HC представляет рациональную в смысле Евклида прямую, только в степени соизмеримую с рациональной прямой $BH=kr$, а значит, и с r. Таким образом, разность $BC=BH-HC$ будет представлять вычет, у которого уменьшаемое BH будет линейно соизмеримо с рациональной прямой $A=r$.

Для доказательства, что мы имеем дело с четвёртым вычетом, нам остаётся лишь показать, что разность квадратов BH^2-HC^2 не будет представлять квадрата на прямой, линейно соизмеримой с BH.

Пусть

$$BH^2-HC^2=G^2.$$

Из пропорции

$$\frac{DE}{EI}=\frac{BH^2}{HC^2} \quad \text{или} \quad \frac{a+b}{b}=\frac{BH^2}{BH^2-G^2}$$

путём «переворачивания» получаем:

$$\frac{a+b}{a}=\frac{BH^2}{G^2}.$$

Поскольку же отношение $\frac{a+b}{a}$ не представляется квадратным числом, то и $G=BH\sqrt{\frac{a}{a+b}}$ не будет выражаться прямой, линейно соизмеримой с BH.

В предложении 89 даётся способ построения пятого вычета, в котором вычитаемое $CH=kr$ будет линейно соизмеримым с рациональной прямой $A=r$. Попрежнему берём два числа $DI=a$, $IE=b$ таких, чтобы отношения $\frac{a+b}{a}$, $\frac{a+b}{b}$ не были

точными квадратами. Уменьшаемое BH определится из пропорции

$$\frac{IE}{ED}=\frac{b}{a+b}=\frac{CH^2}{BH^2},$$

откуда

$$BH=CH\sqrt{\frac{a+b}{b}}.$$

Так как $CH=kr$ рациональна, то мы видим, что BH будет рациональной в смысле Евклида прямой, соизмеримой с HC только в квадрате; таким образом, разность $BC=BH-CH$ будет представлять вычет.

Так как вычитаемое CH представляет прямую, линейно соизмеримую с рациональной прямой $A=r$, то для доказательства, что мы имеем дело с пятым вычетом, нам остаётся лишь убедиться, что разность квадратов BH и CH не будет представлять квадрата на прямой, линейно соизмеримой с уменьшаемым BH.

Составляем выражение

$$BH^2-HC^2=G^2.$$

Из пропорции

$$\frac{BH^2}{HC^2}=\frac{DE}{EI}=\frac{a+b}{b}$$

путём «переворачивания» получаем:

$$\frac{BH^2}{G^2}=\frac{a+b}{a},$$

откуда

$$G=BH\sqrt{\frac{a}{a+b}}.$$

Но $\frac{a}{a+b}$ не выражается отношением квадратных чисел, что и доказывает нужное нам положение.

Наконец, предложение 90 даёт способ построения шестого вычета, в котором ни уменьшаемое, ни вычитаемое не будут линейно соизмеримыми с рациональной прямой $A=r$.

Берём три числа $E=a$, $BC=b$, $CD=c$, не имеющих между собой отношения квадратных чисел; пусть, кроме того, отношение

$$\frac{CB}{BD}=\frac{b}{b-c}$$

тоже не будет выражаться квадратным числом. Оба члена вычета, IH и HG, определяются из пропорций

$$\frac{E}{BC}=\frac{A^2}{IH^2} \quad \text{или} \quad \frac{a}{b}=\frac{r^2}{IH^2},$$

$$\frac{BC}{CD}=\frac{IH^2}{HG^2} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c}=\frac{IH^2}{HG^2},$$

откуда

$$IH=r\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad HG=IH\sqrt{\frac{c}{b}}.$$

Так как $\frac{b}{a}$ не представляет отношения квадратных чисел, то IH будет представлять рациональную в смысле Евклида прямую, лишь в степени соизмеримую с рациональной прямой r. Аналогично убедимся, что и HG будет рациональной прямой, лишь в степени соизмеримой с IH. Таким образом, $IG=IH-HG$ будет представлять вычет.

Для доказательства, что мы имеем дело с шестым вычетом, нам нужно убедиться, что и вычитаемое HG не будет линейно соизмеримо с рациональной прямой $A=r$ (в этом мы легко убедимся, применив преобразование «по равенству», как в предложении 87) и разность квадратов $IH^2-HG^2=K^2$ не будет представлять квадрата на прямой, линейно соизмеримой с уменьшаемым IH. Из пропорции

$$\frac{BC}{CD}=\frac{IH^2}{HG^2} \quad \text{или} \quad \frac{b}{c}=\frac{IH^2}{HG^2}$$

путём переворачивания находим:

$$\frac{b}{b-c}=\frac{IH^2}{K^2},$$

откуда

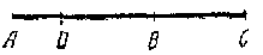
$$K=IH\sqrt{\frac{b-c}{b}}$$

не будет, согласно сделанному относительно $\frac{b-c}{b}$ предположению, представлять прямой, линейно соизмеримой с уменьшаемым IH. (*И. В.*)

58. Другой вывод предложений 85—90. В «Приложении» к гейберговскому изданию Евклида помещено следующее добавление к предложению 90, фигурирующее в некоторых манускриптах в качестве 91:

Можно и короче показать нахождение упомянутых шести вычетов. И вот пусть будет ⟨задано⟩ найти первый. Отложим

первую биномиаль AC, бо́льшая рациональ которой AB, и отложим BD равной BC (черт. 22). Значит, AB, BC, т. е. AB, BD, будут рациональные соизмеримые только в степени (предложение 36), и в квадратах AB будет больше BC, т. е. BD, на ⟨квадрат⟩ на соизмеримой с собой, и AB будет соизмерима линейно с от-



Черт. 22.

ложенной рациональной (определения вторые, 1); значит, AD будет первым вычетом. Подобным же вот образом найдём и остальные вычеты, полагая равночисленные биномиали, что и требовалось доказать».

59. Связь между иррациональными 3-й и 4-й гексад. Предложения 91—96 составляют параллель к предложениям 54—59 касательно биномиалей. Поскольку современная формулировка доказательства этих предложений уже была разобрана нами выше (см. комментарий 47), то теперь мы вполне можем ограничиться разбором только евклидовых доказательств.

В предложении 91 доказывается, что квадратный корень из первого вычета даёт вычет, или, по терминологии Евклида, произведение рациональной прямой на первый вычет даёт квадрат, построенный на вычете.

Возьмём рациональную прямую $AC = r$ и первый вычет $AD = AH - HD$, где HD есть так называемая «сочетающаяся с вычетом; это будет прямая, только в степени соизмеримая с AH и обладающая тем свойством, что $AH^2 - HD^2 = (\lambda \cdot AH)^2$, причем AH по определению будет линейно соизмерима с $AC = r$. Строим на AH прямоугольник AK с недостатком в виде квадрата, равный квадрату на $EH = \frac{1}{2} HD$:

$$AH \cdot x - x^2 = \frac{HD^2}{4},$$

где x представляет отрезок ZH. Согласно предложению 17 отрезки AZ, ZH будут соизмеримы как между собой, так и со всей AH; поскольку же AH будет линейно соизмерима с $AC = r$, то и AZ, ZH будут тоже линейно соизмеримы с AC и, следовательно, рациональны. Затем, поскольку HD соизмерима с AG только в квадрате, а $DE = EH$ будет половиной HD, то DE, EH будут хотя и рациональными в смысле Евклида, но несоизмеримыми линейно с AH и $AC = r$, значит, каждая из площадей DG, EK будет медиальной.

Строим теперь квадраты

$$AC \cdot AZ = OL^2 = \text{квадр. } LM,$$
$$AC \cdot ZH = ON^2 = \text{квадр. } NX.$$

Расположим эти квадраты на одной диагонали OR и произведём построение, служащее для доказательства формулы квадрата суммы (так называемый квадрат с гномоном), обычно употреблявшееся для доказательства предложений II книги. Так как

$$AZ = AH - ZH = AH - x,$$

то

$$AZ \cdot ZH = (AH - x)\, x = EH^2.$$

Отсюда

$$AZ : EH = EH : ZH;$$

$$\text{площ. } AI : \text{площ. } EK = \text{площ. } EK : \text{площ. } KZ.$$

Но

$$\text{площ. } AI = AC \cdot AZ = OL^2, \qquad \text{площ. } KZ = AC \cdot ZH = ON^2.$$

Отсюда видно, что прямоугольник MN, как средняя пропорциональная между площадями квадратов $OL^2 =$ квадр. LM и $ON^2 =$ $=$ квадр. NX, будет равен площади EK. В таком случае прямоугольник DK, равный удвоенному EK, будет представлять удвоенный прямоугольник MN, иными словами, будет равен гномону YFU с добавкой квадрата NX. Но

$$\text{площ. } AK = AC \cdot AZ + AC \cdot ZH - OL^2 + ON^2,$$

$$\text{площ. } DK = \text{гномон } YFU + ON^2;$$

отсюда

$$\text{площ. } AB = \text{квадр. } ST = LN^2 = (OL - ON)^2.$$

Таким образом, доказано, что $LN = OL - ON$ будет квадрирующей для площади AB, равной произведению рациональной AC и первого вычета AD.

Остается доказать, что $LN = OL - ON$ будет вычетом. Для этого нужно показать, что OL и ON будут рациональными в смысле Евклида и соизмеримыми между собой только в степени.

Действительно, линии OL и ON будут сторонами квадратов LM, NX, которые, как мы видели, равны рациональным площадям $AI = AZ \cdot AC$ и $ZK = ZH \cdot AC$; значит, OL и ON, как квадратные корни из рациональных площадей, будут тоже рациональными. Далее, прямые LO и ON будут относиться, как площади прямоугольника LX и квадрата NX, из которых LX, как равная $DG =$ $= DE \cdot AC$, будет медиальна, а NX рациональна; таким образом, LO будет линейно несоизмерима с ON, что и доказывает нашу теорему.

В предложении 92, аналогичном 55, доказывается, что первый медиальный вычет является квадратным корнем из второго вычета.

Опять берём площадь AB, равную произведению рациональной $AC = r$ и второго вычета AD, который мы представляем в виде разности AH и HD; так как AD — второй вычет, то имеют место равенства

$$AH^2 - HD^2 = (\lambda \cdot AH)^2, \quad HD = k \cdot AC.$$

Если приложить к AH с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата на HD, то точка деления Z разделит по предложению 17 прямую AH на соизмеримые отрезки AZ и ZH. Упомянутая четверть квадрата получается делением DH пополам в точке E. Так как AH несоизмерима с HD, а следовательно, и с AC, то и отрезки AZ, ZH будут тоже несоизмеримыми с AC; это значит, что каждая из площадей $AI = AZ \cdot AC$ и $ZK = ZH \cdot AC$ будет медиальной. Далее, поскольку HD, а значит, и её половины DE и EH будут соизмеримы с AC, то каждая из площадей $DG = DE \cdot AC$ и $EK = EH \cdot AC$ будет рациональной.

Теперь строим два квадрата:

$$\text{квадр. } LM = OL^2 = AZ \cdot AC = \text{площ. } AI,$$

$$\text{квадр. } NX = ON^2 = ZH \cdot AC = \text{площ. } ZK.$$

Так как площади AI и ZK являются медиальными, то отсюда следует, что и OL, ON будут медиалями, соизмеримыми в степени (это следует из того, что квадраты их OL^2 и ON^2 относятся, как соизмеримые линии AZ и ZH). То обстоятельство, что они будут соизмеримы только в степени, Евклидом доказывается в самом конце предложения; из факта медиальности обеих площадей AI и ZK можно заключить только о медиальности квадрирующих их линий, но не о линейной их несоизмеримости, на что справедливо указывают комментаторы.

Дальнейшее рассуждение следует тому же пути, что и в предложении 91.

Из равенства

$$AZ \cdot ZH = EH^2$$

заключаем, что EH будет средней пропорциональной между AZ и ZH; значит, и площ. $EK = EH \cdot AC$ будет средней пропорциональной между площ. $AI = AZ \cdot AC = OL^2$ и площ. $ZK = ZH \times AC = ON^2$. Отсюда заключаем, что площ. EK будет равна прямоугольнику $MN = OL \cdot ON$, а площ. $DK = 2$ площ. EK будет равна гномону YFU вместе с добавкой квадрата NX и, наконец, остаток — площ. $AB = AC \cdot AD$ будет равна квадрату ST, т. е. $(OL - ON)^2$.

Остаётся доказать, что $LN = OL - ON$ будет первым медиальным вычетом, части которого OL, ON дают в произведении рациональную площадь. Действительно, $OL \cdot ON$ дают в произведении прямоугольник MN или LX, равный рациональной площади $EK = EH \cdot AC$. Затем мы уже видели, что квадраты OL^2, ON^2 будут соизмеримы; отсюда следует, что OL и ON будут соизмеримы в степени; таким образом, остаётся лишь доказать, что они будут соизмеримы только в степени. Действительно,

$$OL : ON = \text{площ. } LX : \text{площ. } NX.$$

Но площадь $LX = OL \cdot ON$ рациональна, площадь же $NX = AC \cdot ZH$ будет медиальна, откуда и следует линейная несоизмеримость медиалей OL и ON.

Предложение 93, аналогичное 56, доказывает, что третий вычет будет квадратом второго медиального вычета, произведение составных частей которого будет медиальным, причём оба множителя будут соизмеримыми в степени.

Опять, подобно предыдущему, рассматриваем площ. AB, равную произведению рациональной AC на третий вычет $AD = AH - HD$, причём

$$AH^2 - HD^2 = (\lambda \cdot AH)^2,$$

но только теперь ни AH, ни HD уже не будут соизмеримыми с рациональной AC.

Прикладывая к AH с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата на DH или квадрату на DE или EH, мы получаем, согласно предложению 17, на AH два линейно соизмеримых между собой отрезка AZ, ZH, произведение которых равно будет EH^2. Так как AH не будет линейно соизмерима с AC, то площади $AK = AH \cdot AC$, $AI = AZ \cdot AC$, $ZK = ZH \cdot AC$ будут медиальными, ибо соизмеримые между собой и с AH отрезки AZ и ZH не будут линейно соизмеримы с AC. Точно так же убеждаемся в том, что и площади $DG = DE \cdot AC$, $EK = EH \cdot AC$ будут медиальными, ибо и DH, и её половины DE и EH будут только в степени соизмеримы с рациональной AC. Наконец, из того обстоятельства, что AH и HD будут соизмеримы только в степени, мы можем заключить, что отрезки AH, AZ, ZH, с одной стороны, HD, DE, EH, с другой, будут линейно несоизмеримыми между собой, откуда вытекает и несоизмеримость соответственных площадей, в частности $AI = AZ \cdot AC$ и $EK = EH \cdot AC$.

Попрежнему строим на одной диагонали два квадрата: один LM, равный площади AI, т. е. произведению $AZ \cdot AC$, и другой NX, равный площади ZK, т. е. $ZH \cdot AC$. Из равенства $AZ \cdot ZH = EH^2$ опять убеждаемся, что прямоугольник $MN = OL \cdot ON$, как средняя пропорциональная между $OL^2 =$ квадр. LM и $ON^2 =$ квадр. NX, будет равняться площ. $EK = EH \cdot AC$ — средней пропорциональной между $AI = AZ \cdot AC$ и $ZK = ZH \cdot AC$. Затем аналогично предыдущему убеждаемся, что площ. $AB = AC \cdot AD$ равна будет квадрату ST или $LN^2 = (OL - ON)^2$; таким образом, найдена квадрирующая $LN = OL - ON$ для заданного произведения $AC \cdot AD$.

Остаётся доказать, что эта квадрирующая будет вторым медиальным вычетом, представляющим разность двух соизмеримых только в степени медиалей, произведение которых будет медиальным.

Действительно, мы имели:

$$OL^2 = \text{площ. } AI = AZ \cdot AC,$$
$$ON^2 = \text{площ. } ZK = ZH \cdot AC.$$

Из соизмеримости AZ и ZH вытекает соизмеримость в квадра-

тах линий OL и ON. Из несоизмеримости AZ и ZH с рациональной AC вытекает медиальность площадей $AI = AZ \cdot AC$ и $ZK = ZH \cdot AC$, а значит, и медиальность сторон соответствующих квадратов OL^2 и ON^2. Таким образом, остаётся лишь показать, что произведение $OL \cdot ON$ будет представлять медиальную площадь. Действительно, мы имели $OL \cdot ON$ — площ. MN = площ. $EK = EH \cdot AC$; из того обстоятельства, что EH есть рациональная в смысле Евклида прямая, только в степени соизмеримая с AC, следует медиальность площ. EK, а значит, и произведения $OL \cdot ON$.

Предложение 94 показывает, что четвёртый вычет можно рассматривать как квадрат так называемой меньшей иррациональной, состоящей из двух несоизмеримых даже в степени медиалей, сумма квадратов которых рациональна, произведение же медиально.

Берём четвёртый вычет AD и представляем его как разность двух прямых AH и HD, из которых бо́льшая AH будет линейно соизмерима с рациональной прямой AC, а разность квадратов $AH^2 - HD^2$ не будет представлять квадрата на прямой, линейно соизмеримой с AH. Последнее обстоятельство в связи с предложением 18 позволяет утверждать, что если мы приложим к AH с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата на DH или квадрату на её половине EH, то AH рассечётся на две части AZ, ZH, которые не будут линейно соизмеримы ни между собой, ни со всей прямой AH. Теперь площади, на которые рассечётся прямоугольник $AK = AH \cdot AC$, будут следующие: площ. $AK = AH \cdot AC$ рациональна, площ. $DK = DH \cdot AC$ медиальна (так как DH только в квадратах будет соизмерима с рациональной прямой AH, а следовательно, и с AC).

Площади $AI = AZ \cdot AC$ и $ZK = ZH \cdot AC$ будут несоизмеримы между собой вследствие несоизмеримости отрезков AZ и ZH.

Строим на одном диаметре OR попрежнему два квадрата:

$$LM = OL^2 = AI = AZ \cdot AC \text{ и } NX = ON^2 = ZK = ZH \cdot AC.$$

Средней пропорциональной для этих квадратов будет попрежнему площадь $EK = EH \cdot AC$ вследствие равенства

$$AZ \cdot ZH = EH^2;$$

эта площадь EK или DG будет равна прямоугольнику $MN = OL \cdot ON$. Попрежнему заключаем, что вся площадь $DK = HD \cdot AC$ равна будет гномону YFU с добавкой квадрата на NX, а значит, и площадь $AB = AD \cdot AC$ представится, как квадрат $ST = LN^2 = (OL - ON)^2$. Таким образом, определена прямая $LN = OL - ON$, квадрирующая заданную нам площадь $AB = AD \cdot AC$.

Остаётся показать, что эта квадрирующая будет меньшей иррациональной.

Так как площадь $AK = AH \cdot AC$ будет рациональна, то сумма квадратов

$$OL^2 + ON^2 = AZ \cdot AC + ZH \cdot AC = AH \cdot AC$$

будет рациональна.

Далее, произведение

$$OL \cdot ON = EK = \frac{DK}{2} = \frac{DH \cdot AC}{2}$$

будет медиально.

Наконец, вследствие несоизмеримости OL^2 и ON^2 получается, что OL и ON будут несоизмеримы даже в степени.

Эти три признака и позволяют установить, что квадрирующая $LN = OL - ON$ и будет «меньшей» иррациональной.

Совершенно так же доказывается и предложение 95; единственная разница будет заключаться лишь в том, что теперь произведение $AH \cdot AC$ будет медиальным, а $DH \cdot AC$ — рациональным вследствие того, что DH для пятого вычета будет линейно соизмерима с рациональной AC. Вследствие этого окажется, что для квадрирующей $OL - ON$ сумма квадратов обеих составных частей будет медиальна, а произведение рационально, квадраты же OL^2 и ON^2 попрежнему несоизмеримы между собой. Это позволяет нам утверждать, что квадрирующая $OL - ON$ будет так называемой «образующей с рациональным целое медиальное».

Наконец, последнее предложение 96 доказывает, что квадратным корнем из шестого вычета будет «образующая с медиальным целое медиальное».

Согласно определению шестой вычет может быть представлен в виде разности двух прямых AH и HD, каждая из которых не будет линейно соизмерима с рациональной AC, причём разность квадратов $AH^2 - HD^2$ не будет выражаться квадратом на прямой, линейно соизмеримой с AC. Согласно предложению 18, если мы приложим к AH с недостатком в виде квадрата площадь, равную четверти квадрата на DH или квадрату на $EH = \frac{1}{2} HD$, то полученная точка деления Z рассечёт AH на линейно несоизмеримые между собой отрезки AZ и ZH. Построив на прямой AH и её частях ряд прямоугольников: $AK = AH \cdot AC$, $AI = AZ \cdot AC$, $ZK = ZH \cdot AC$, $DK = DH \cdot AC$, $EK = EH \cdot AC$, мы можем сказать, что вследствие несоизмеримости AH и HD с рациональной прямой AC площади AK и DK будут медиальными и несоизмеримыми между собой (так как AH и HD по условию соизмеримы только в квадратах), площади же AI и ZK несоизмеримы между собой. Рассуждая, как раньше, получим, что квадрирующая площадь $AB = AD \cdot AC$, где AD — заданный шестой вычет, будет прямая $OL - ON$, причём

$$OL^2 = AI = AZ \cdot AC,$$

$$ON^2 = ZK = ZH \cdot AC,$$

$$OL \cdot ON = EK = AC \cdot EH,$$

$$OL^2 + ON^2 = AK = AH \cdot AC.$$

Мы видим, что OL и ON будут несоизмеримы даже в квадратах, поскольку AZ линейно несоизмерима с ZH, произведение $OL \cdot ON = EK = \frac{DK}{2}$ будет медиальным и сумма квадратов $OL^2 + ON^2 - AK$ будет тоже медиальна; все эти признаки характерны для «образующей с медиальным целое медиальное» (*И. В.*).

60. Вычеты как результат возведения в квадрат иррациональностей третьей гексады. В предложениях 97—102 рассматриваются шесть теорем, которые являются обратными предложениям 91—96. В предложении 97 утверждается, что частное от деления квадрата вычета AB^2 на рациональную прямую CD будет представлять первый вычет:

$$CI = \frac{AB^2}{CD} = \frac{\text{площ. } CE}{CD}.$$

Поскольку AB есть вычет, то мы можем представить его в виде разности двух рациональных прямых $AH - HB$, соизмеримых только в степени. Мы имеем:

$$AB^2 = (AH - HB)^2 = AH^2 + HB^2 - 2AH \cdot HB,$$

$$\text{площ. } CE = \text{площ. } CG + \text{площ. } KL - \text{площ. } IL.$$

Последнюю площадь мы можем разбить на две равные площади IX и NL, равные каждая произведению $AH \cdot HB$.

Мы видим, что вследствие рациональности AH и HB будет рациональна и площадь $DM = AH^2 + HB^2$, а следовательно, и прямая $CM = \frac{AH^2 + HB^2}{CD}$; далее, вследствие линейной несоизмеримости AH и HB площадь $IL = 2AH \cdot HB$ будет медиальной, а частное $\frac{2AH \cdot HB}{CD} = IM$ будет хотя и рациональной в смысле Евклида прямой, но несоизмеримой линейно с CD, а значит, и с CM. Таким образом, мы видим, что

$$\frac{AB^2}{CD} = CM - IM = CI;$$

значит, прямая CI, представляющая разность двух рациональных, соизмеримых только в степени прямых, будет вычетом.

Для доказательства, что мы имеем дело с первым вычетом, нам нужно показать: 1) что CM линейно соизмерима с рациональной прямой CD, а IM нет и 2) что $CM^2 - IM^2 = \lambda \cdot CM^2$. Первый пункт легко выясняется из способа построения CM и IM как частных от деления рациональной и медиальной площадей DM и IL. Правильность второго пункта Евклид доказывает так: из пропорции

$$AH^2 : AH \cdot HB = AH \cdot HB : BH^2,$$

$$\text{площ. } CG : \text{площ. } NL = \text{площ. } NL : \text{площ. } KL,$$

он выводит пропорциональность прямых, получающихся от деления этих площадей на рациональную прямую CD, а именно:

$$CK : NM = NM : KM.$$

Отсюда получается:

$$CK \cdot KM = NM^2 = \frac{IM^2}{4}.$$

Далее, *из соизмеримости* AH^2 и BH^2 *следует соизмеримость пропорциональных им отрезков* CK и KM. Теперь мы имеем две неравные прямые CM и MI, и к CM с недостатком в виде квадрата приложена площадь $CK \cdot KM = \frac{IM^2}{4}$, причём точка деления K делит прямую CM на соизмеримые отрезки CK и KM; это значит (предложение 17), что CM в квадратах будет больше MI на квадрат, построенный на прямой, линейно соизмеримой с CM; *это обстоятельство и доказывает, что* CI *будет первым вычетом.*

В предложении 98 доказывается, что квадрат на первом медиальном вычете даёт второй вычет.

Первый медиальный вычет AB мы можем, согласно определению, представить в виде разности двух соизмеримых только в степени медиалей AH и BH, произведение которых $AH \cdot BH$ будет представлять рациональную площадь.

Возьмём рациональную прямую CD и приложим к ней площадь $AB^2 = CE$, требуется доказать, что сторона CI будет вторым вычетом. Возводим $AH - BH$ в квадрат и строим последовательно на CD площади

$$CG = CD \cdot CK = AH^2,$$

$$KL = CD \cdot KM = HB^2.$$

Поскольку AH и BH будут соизмеримые в квадрате медиали, то вся площадь $CL = AH^2 + HB^2$ будет медиальной; разделив CL на рациональную прямую CD, мы получим прямую CM, которая будет рациональной в смысле Евклида, но несоизмеримой с CD линейно.

Затем, как и в предыдущей теореме, убеждаемся, что площадь IL будет равняться $2AH \cdot HB$, *т. е. по определению первого медиального вычета представляет рациональную площадь*; разделив её на рациональную CD, получаем рациональную же, линейно соизмеримую с CD прямую CM. Затем, вследствие несоизмеримости медиальной площади CL и рациональной IL рациональные прямые CM и IM будут линейно несоизмеримы, т. е. их разность $CI = CM - IM$ представляет вычет.

Для доказательства, что мы имеем дело со вторым вычетом, нам остаётся показать, что CM будет линейно несоизмерима с CD (это следует из медиальности площади CL), IM же будет линейно соизмеримой с CD (так как площадь IL рациональна) и, наконец, что $CM^2 - IM^2$ представляет квадрат на прямой, линейно соизмеримой с CM, это последнее доказывается совершенно так же, как

и в предложении 97. Таким образом, CI действительно будет представлять второй вычет.

В предложении 99 разбирается способ получения третьего вычета из квадрата на втором медиальном вычете, представляющем разность двух соизмеримых только в степени медиалей AH, BH, произведение которых $AH \cdot BH$ будет медиальным.

К рациональной прямой CD прикладываем площадь $CE = AB^2$; требуется доказать, что CI будет третьим вычетом. Аналогично предыдущему предложению строим площади

$$CG = CD \cdot CK = AH^2,$$
$$KL = CD \cdot KM = HB^2.$$

Сумма $AH^2 + HB^2 = CL = CD \cdot CM$ будет медиальной, а сторона CM рациональной, линейно несоизмеримой с CD.

Затем вследствие медиальности произведения $AH \cdot HB$ площадь $IL = 2AH \cdot BH$ будет тоже медиальной; по разделении её на рациональную CD мы получаем рациональную в смысле Евклида прямую IM, несоизмеримую с CD линейно.

Теперь остаётся показать, что рациональные прямые CM и IM будут несоизмеримы линейно. Так как прямые AH и BH будут соизмеримы только в степени, то значит, площади AH^2 и $AH \cdot BH$ будут несоизмеримыми; отсюда получаем, что несоизмеримыми будут и площади $AH^2 + BH^2$ и $2AH \cdot BH$, а значит, и получающиеся делением их на рациональную CD прямые CM и IM.

Убедившись, что $CI = CM - IM$ будет вычетом, мы должны показать, что он будет третьим вычетом, обе части которого будут линейно несоизмеримы с рациональной CD (это следует из медиальности площадей CL и IL), и что $CM^2 - IM^2$ будет представлять квадрат на прямой, линейно соизмеримой с CM. Это получается совершенно так же, как и в предложении 97, на основании предложения 17 и вследствие того, что отрезки

$$CK = \frac{AH^2}{CD}, \quad KM = \frac{BH^2}{CD}$$

будут линейно соизмеримыми.

В предложениях 100–102 вместо теоремы 17 фигурирует 18, утверждающая, что если в результате приложения к прямой CM с недостатком в виде квадрата площади $CK \cdot KM$, равной квадрату на половине, меньшей прямой IM, получаются несоизмеримые отрезки CK, KM, то это значит, что $CM^2 - IM^2$ будет представлять квадрат на несоизмеримой с CM прямой — признак, который является общим для трёх последних вычетов: 4-го, 5-го и 6-го. Эта несоизмеримость отрезков

$$CK = \frac{AH^2}{CD}, \quad KM = \frac{BH^2}{CD},$$

где CD — рациональная прямая, вытекает из того, что для трёх последних иррациональностей — «меньшей», «образующей с рациональным целое медиальное» и «образующей с медиальным целое медиальное» — квадраты их составных частей AH и BH будут несоизмеримыми.

В предложении 100 строится квадрат на «меньшей» иррациональной $AB = AH - BH$, для которой сумма квадратов $AH^2 + BH^2$ будет рациональна, произведение же $AH \cdot BH$ медиально; это значит, что прямая

$$CM = \frac{AH^2 + BH^2}{CD}$$

будет линейно соизмерима с CD, а прямая

$$IM = \frac{2AH \cdot BH}{CD}$$

будет хотя и рациональной в смысле Евклида, но линейно несоизмеримой с CD. Так как рациональные CM и IM будут соизмеримы только в квадрате, то получающаяся прямая $CI = CM - IM$ будет четвёртым вычетом.

В предложении 101 мы имеем дело с «образующей с рациональным целое медиальное» $AB = AH - BH$, для которой сумма $AH^2 + BH^2$ будет медиальна, произведение же $AH \cdot BH$ рационально. В результате CM будет линейно несоизмеримым с CD, а IM будет линейно соизмеримым, что характерно для пятого вычета.

Наконец, в предложении 102 мы имеем дело с «образующей с медиальным целое медиальное», для которой обе площади $AH^2 + BH^2$ и $AH \cdot BH$ будут медиальными и притом незоизмеримыми. Отсюда следует, что обе прямые

$$CM = \frac{AH^2 + BH^2}{CD}, \quad IM = \frac{2AH \cdot BH}{CD}$$

будут, во-первых, линейно несоизмеримыми с рациональной CD и, во-вторых, линейно несоизмеримыми между собой; таким образом, $CI = CM - IM$ будет представлять шестой вычет.

Отметим, что шесть предложений 97—102 представляют параллель аналогичным предложениям 60—65 для биномиалей. (*И. В.*)

61. Окончание X книги. Следствием из предложения 111 заканчивается несомненно подлинная часть X книги; остальные четыре предложения Гейберг помещает, как сомнительные, в квадратных скобках, хотя и сохраняет их в самом тексте Евклида, не относя в «Приложение».

Предложения 103—107 аналогичны предложениям 66—70, установленным для биномиалей; они доказывают, что прямая, соизмеримая данной иррациональности, будет иррациональностью того же самого вида; доказательства их настолько просты, что не требуют никаких пояснений.

Три предложения 108—110 рассматривают иррациональные, получаемые, как мы сказали бы, извлечением квадратного корня из разности двух площадей — рациональной и медиальной, или двух несоизмеримых медиальных. Их доказательства тоже не требуют никаких пояснений: результат сводится к тому, что получаются все шесть различных иррациональностей третьей гексады.

Большой интерес представляет предложение 111, доказывающее, что биномиаль и вычет принадлежат к совершенно отличным друг от друга классам иррациональностей.

С нашей точки зрения, дело сводится к доказательству невозможности равенства

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{c}-\sqrt{d}.$$

Возведя обе части равенства в квадрат и сгруппировав рациональные и иррациональные члены, мы получим:

$$2\sqrt{ab}+2\sqrt{cd}=(c+d)-(a+b),$$

т. е. сумма двух иррациональных должна будет равняться рациональному числу, что невозможно.

Евклид доказывает эту теорему так.

Он берёт вычет AB и квадрат на нём прикладывает к рациональной прямой CD; шириной полученного прямоугольника CE будет, как известно, первый вычет DE.

Пусть EI будет сочетающаяся с ним:

$$DE=DI-EI.$$

Обе прямые DI и EI будут рациональными в смысле Евклида, соизмеримыми только в степени, причём DI^2-EI^2 будет представлять квадрат на прямой, соизмеримой с DI, причем сама DI будет, согласно определению первого вычета, линейно соизмеримой с рациональной прямой CD.

Если теперь AB будет одновременно и биномиалью, то, приложив её квадрат к рациональной прямой, мы должны получить в качестве стороны первую биномиаль. Значит, DE будет также первой биномиалью, которая единственным образом разделяется H на рационали.

Пусть DH будет бо́льшая рациональ; тогда DH, HE будут две соизмеримые лишь в квадрате прямые, причём DH^2-HE^2 представляет квадрат на прямой, соизмеримой с DH, которая в свою очередь будет соизмерима с рациональной CD.

Но если DI и DH соизмеримы линейно с рациональной CD, то и их разность IH будет линейно соизмерима с CD, а следовательно, и с DI.

С другой стороны, EI будет линейно несоизмерима с DI, а IH линейно несоизмерима с EI (ибо IH соизмерима с DI); значит, $HE=HI-EI$ будет вычетом. Вместе с тем EH, как часть бино-

миали DE, будет и рациональной (в смысле Евклида), что невозможно.

Если бы мы хотели сделать доказательство Евклида более соответствующим нашему, то нужно было бы рассматривать прямую IH сначала как разность двух прямых DH и DI, линейно соизмеримых с рациональной CD, а затем как сумму $HE+EI$ двух прямых, линейно несоизмеримых с DH и DI, а следовательно, и с CD, но тогда нам пришлось бы доказывать линейную несоизмеримость HE и EI. (*И. В.*)

62. Разность квадратов и близкие ей формулы. Три предложения 112—114 составляют обособленную группу и в алгебраическом обозначении эквивалентны равенствам

$$\frac{k(a-b)}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=k\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right) \text{ (предложение 112);}$$

$$\frac{k(a-b)}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right) \text{ (предложение 113);}$$

$$k\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)=k(a-b) \text{ (предложение 114).}$$

Гейберг не считает их принадлежащими Евклиду, потому что, по его мнению, заключение теоремы 111 подвело итог всему содержанию X книги. Важным аргументом, подтверждающим мнение Гейберга, может служить наблюдаемая в этих предложениях терминология: составные части биномиали и вычета, $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$, называются в этих предложениях одинаковым термином ὀνόματα = рационали; в основном же тексте X книги этот термин применяется лишь к членам биномиали; для членов же вычета употребляются выражения: $\sqrt{a}$ = ὅλη — целая, $\sqrt{b}$ = προσαρμόζουσα сочетающаяся. Во всяком случае эти предложения представляют большой интерес и по важности получающихся формул и по виртуозности доказательств.

В доказательстве предложения 112 ход рассуждений автора (*Гейберг считает возможным отнести эти теоремы к Аполлонию*) имеет следующий вид.

Берём рациональную прямую $A=r$ и биномиаль

$$CB=CD+DB=\sqrt{a}+\sqrt{b}.$$

Требуется определить прямую $EI=u$, удовлетворяющую равенству

$$BC\cdot EI=A^2 \text{ или } u\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=r^2,$$

и показать, что эта прямая может быть представлена в виде вычета

$$EI=(u+w)-w,$$

в котором оба члена $u+w$ и w находятся в отношении $\sqrt{a}:\sqrt{b}$.

Автор определяет сначала прямую $H = EG$ из равенства

$$DB \cdot H = A^2 \text{ или } H \cdot \sqrt{b} = r^2.$$

Вследствие равенства

$$H \cdot \sqrt{b} = u\left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)$$

эта прямая будет удовлетворять пропорции

$$\frac{BC}{BD} = \frac{H}{EI} \text{ или } \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{b}} = \frac{EG}{EI}.$$

Мы видим, что $EG > EI$. Применяя операцию «выделения», мы приходим к равенству

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{EG - EI}{EI} = \frac{GI}{u}.$$

Обозначим IG через v и будем отыскивать $w = EK$ из пропорции

$$\frac{GI}{EI} = \frac{IK}{KE} \text{ или } \frac{v}{u} = \frac{u + w}{w} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Из этого равенства легко получаем.

$$\frac{GI + IK}{EI + KE} = \frac{KI}{EK} = \frac{IG}{IE} \quad \text{или} \quad \frac{u + v + w}{u + w} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Мы видим, что прямые $GK = u + v + w$ и $IK = u + w$ будут соизмеримы в степени.

Теперь из пропорции

$$\frac{GK}{IK} = \frac{KI}{EK} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

легко получаем:

$$\left(\frac{GK}{IK}\right)^2 = \frac{GK}{IK} \cdot \frac{IK}{EK} = \frac{a}{b}.$$

Таким образом, $GK = u + v + w$ будет линейно соизмерима с $EK = w$, а значит, и $EG = GK - EK = u + v$ тоже линейно соизмерима с w.

Из равенства

$$EG \cdot BD = A^2 \text{ или } (u + v) \cdot \sqrt{b} = r^2$$

мы видим, что $EG = u + v$ будет рациональна и линейно соизмерима с $BD = \sqrt{b}$, а значит, и линейно соизмеримая с EG прямая $EK = w$ тоже будет рациональна и линейно соизмерима с $BD = \sqrt{b}$. Таким образом,

$$w = EK = k\sqrt{b}.$$

Теперь из отношения

$$\frac{IK}{KE}=\frac{CD}{BD}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

мы видим, что $IK=u+w$ соизмерима с KE только в степени, но рациональна в смысле Евклида; она будет равна

$$IK=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,KE=k\sqrt{a}\,.$$

Таким образом,

$$EI=IK-EK=(u+w)-w=k\sqrt{a}-k\sqrt{b}$$

будет вычетом, оба члена которого пропорциональны соответствующим членам биномиали и который, очевидно, будет того же самого ранга, что и первоначальная биномиаль.

В предложении 113 доказывается аналогичная теорема для вычета.

Берём рациональную $A=r$ и вычет

$$BD=BC-CD=\sqrt{a}-\sqrt{b}\,.$$

Требуется показать, что прямая KG, определяемая из условия

$$A^2=BD\cdot KG,$$

будет иметь вид $KG=k\sqrt{a}+k\sqrt{b}=(u-w)+w$.

Определяем прямую H из условия

$$A^2=BC\cdot H \text{ или } r^2=\sqrt{a}\cdot H.$$

Нетрудно видеть, что H будет рациональной прямой, линейно соизмеримой с $BC=\sqrt{a}$. С определяемой прямой KG она связана равенством

$$A^2=BD\cdot KG=BC\cdot H,$$

откуда

$$\frac{BC}{BD}=\frac{KG}{H} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}=\frac{KG}{EK},$$

где $H=EK$. Мы видим, что KG будет больше $H=EK$. При помощи операции «переворачивания» мы из предыдущей пропорции получаем:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{KG}{KG-EK}=\frac{KG}{EG}=\frac{u}{v},$$

где $v=EG=KG-EK=u-(u-v)$.

Строим теперь прямые IG и IE, удовлетворяющие условию

$$\frac{KG}{EG}=\frac{IG}{IE} \quad \text{или} \quad \frac{u}{v}=\frac{w}{v-w}.$$

Мы будем иметь:

$$\frac{KG}{EG-EI}=\frac{KG}{EG},$$

$$\frac{KI}{IG}=\frac{KG}{EG} \quad \text{или} \quad \frac{u-w}{w}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Мы видим, что прямые $KI=u-v$ и $IG=w$ соизмеримы только в степени.

Теперь из пропорции

$$\frac{KG}{EG}=\frac{KI}{IG}=\frac{IG}{EI}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

следует:

$$\frac{KI^2}{IG^2}=\frac{KI}{IG}\cdot\frac{IG}{EI}=\frac{KI}{EI}.$$

Значит, $KI:EI=KI^2:IG^2=a:b$; таким образом, прямая $KI=u-w$ будет линейно соизмерима с $EI=v-w$. Точно так же разность $KI-EI=EK$ линейно соизмерима с EI, а значит, и KI будет линейно соизмерима с $FK=H=k\sqrt{a}$, так как H будет линейно соизмеримой с $BC=\sqrt{a}$.

Теперь мы можем написать:

$$\frac{KI}{IG}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

Мы видим, что KI, IG соизмеримы только в степени, причём если

$$KI=u-w=k\sqrt{a},$$

то

$$IG=w=k\sqrt{b}.$$

Их сумма

$$KG=(u-w)+w=k\sqrt{a}+k\sqrt{b}$$

будет биномиалью и притом того же самого ранга, что и взятый вычет $BD=\sqrt{a}-\sqrt{b}$.

Наконец, предложение 114 даёт известную формулу разложения разности квадратов. Нужно, однако, отметить, что она даётся не в привычном для нас виде

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

но в виде

$$\sqrt{(\sqrt{a}-\sqrt{b})\cdot k(\sqrt{a}+\sqrt{b})}=\sqrt{k(a-b)},$$

так как в формулировке предложения речь идёт о квадрирующей заданную площадь.

Берём:

$$AB = AI \quad IB = k\sqrt{a} - \sqrt{b},$$
$$CD = CE \quad ED = k\sqrt{a} + k\sqrt{b}.$$

Требуется доказать, что $AB \cdot CD = H^2$, где H будет некоторая рациональная (в смысле Евклида) прямая.

Возьмём рациональную прямую $G = r$ и определим KL из уравнения

$$r^2 = CD \cdot KL.$$

По только что доказанной теореме KL должна быть вычетом и иметь вид

$$KL = KM \quad ML = k'\sqrt{a} - k'\sqrt{b}.$$

Таким образом,

$$r^2 = (k\sqrt{a} + k\sqrt{b})(k'\sqrt{a} - k'\sqrt{b}).$$

Мы имеем:

$$AI : IB = KM : ML.$$

Из этой пропорции легко получаем:

$$\frac{AI}{KM} = \frac{IB}{ML} = \frac{AB}{KM + ML}.$$

Теперь будем иметь:

$$\frac{AB}{KL} - \frac{AI}{KM} = \frac{1}{k'} = \text{рац. числу.}$$

Но

$$\frac{AB}{KL} = \frac{AB \cdot CD}{KL \cdot CD} = \frac{H^2}{r^2},$$

откуда видно, что квадрирующая

$$H = r\sqrt{\frac{1}{k'}}$$

будет рациональной в смысле Евклида прямой. (*И. В.*)

63. Освобождение знаменателя от иррациональности [47]. Из предложений 113, 114 можно получить правило освобождения знаменателя от иррациональности.

Интересно отметить, что формула

$$\frac{1}{\sqrt{a} \mp \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}{a - b},$$

---

[47]) Tropfke, Gesch. der Elementar-Math., Bd. II, 3. Aufl. 1933, стр. 200—204 (D, 3, c).

выражающая правило освобождения знаменателя от иррациональности, выводящаяся из предложений 113, 114 (если мы заменим отрезки выражающими их корнями квадратными из чисел), у индусов выступает в чисто арифметической форме: следует числитель и знаменатель умножить на выражение, аналогичное знаменателю и числителю, но только с другим знаком при одной из иррациональных, и эта операция должна производиться до тех пор, пока не будет возможно произвести в действительности требуемое деление.

По существу это правило есть *наше* правило, предлагающее помножить числитель или знаменатель на *сопряжённое* выражение.

У Луки Пачиоли мы находим примеры освобождения от трёх иррациональностей в знаменателе. Он идёт таким образом:

$$\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}+\sqrt{7}+\sqrt{8}}=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})}{(\sqrt{6}+\sqrt{7})^2-8}=$$

$$=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})}{\sqrt{168}+5}=\frac{\sqrt{10}(\sqrt{6}+\sqrt{7}-\sqrt{8})(\sqrt{168}-5)}{143}.$$

У Кардана мы уже находим освобождение от кубических радикалов по формуле, являющейся следствием известной формулы Безу

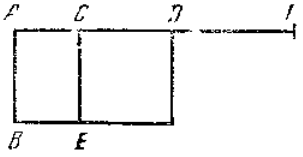
$$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3.$$

Затем Сципион Ферро освобождается от трёх кубических корней в знаменателе, обнаруживая, что

$$(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{12}+$$
$$+2+\sqrt[3]{6})\cdot(81+\sqrt[3]{419904}+\sqrt[3]{472392})=81.$$

Тарталья же вполне владеет аппаратом освобождения от биномиальных иррациональных какого угодно порядка.

64. Другое доказательство предложения 115. В «Приложении» к гейберговскому изданию Евклида помещено ещё другое доказательство этого предложения.



Черт. 23.

«Иначе.

Пусть будет меньшая AC, я утверждаю, что из AC возникают в бесконечном множестве иррациональные и никакая никакой из предыдущих не тождественна (черт. 23).

Проведём AB под прямым углом к AC, и пусть AB будет рациональной, и дополним ⟨прямоугольник⟩ BC; значит, BC будет иррациональным (предложение 20) и квадрирующая его будет иррациональной. Пусть квадрирует его ⟨прямая⟩ CD; значит, CD

будет иррациональной. И она никакой из предыдущих не тождественна; ибо ⟨квадрат, построенный⟩ на любой из предыдущих, будучи приложен к рациональной, не образует шириной медиаль. Опять дополним ⟨прямоугольник⟩ ED; иррациональным, значит, будет и ED, и квадрирующая его будет иррациональной (предложение 20). Пусть квадрирует его DI; значит, DI будет иррациональной. И она никакой из предыдущих не тождественна; ибо ⟨квадрат, построенный⟩ на любой из предыдущих, будучи приложен к рациональной, не образует шириной CD.

Итак, *из медиали возникают в бесконечном множестве* иррациональные, и никакая никакой из предыдущих не тождественна; что и требовалось доказать.

65. Античное расширение области иррациональных. X книга «Начал» дает полную классификацию иррациональностей, соответствующих извлечению квадратного корня, производившемуся один или два раза. Дальнейшее расширение этой области должно было итти по двум путям.

Во-первых, можно было использовать иррациональности, отвечающие трёх-, четырёх- и т. д. кратному извлечению корня. Возможность такого пути намечает и сам Евклид: от рациональной, *соизмеримой только в степени* $\sqrt{\alpha}$, он переходит к медиали $\sqrt{\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}} = \sqrt[4]{A}$. В предложении 115 намечаются иррациональности типа

$$\sqrt{r\sqrt[4]{A}} = \sqrt[8]{A_1}, \quad \sqrt{r\sqrt[8]{A_1}} = \sqrt[16]{A_2} \text{ и т. д.},$$

где r является рациональной прямой.

Во-вторых, можно было бы от биномиали перейти к мультиномиали, т. е. к иррациональностям типа

$$I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n,$$

где $I_1, \ldots, I_n$ суть простые одночленные евклидовы рациональности. Опираясь на показания арабских комментаторов, Вепке[48]) видит такие иррациональности в недошедшем до нас сочинении Аполлония.

1) *Триномиаль.* «Предположим три рациональные прямые, соизмеримые только в степени. Линия, составленная из двух таких линий, т. е. биномиаль, будет иррациональной, и следовательно, площадь, заключающаяся между этой линией и оставшейся, будет *иррациональной*, и точно так же будет иррациональной удвоенная площадь, заключающаяся между этими двумя линиями. Таким образом, квадрат на целой линии, составленной из этих

---

[48]) См. примеч. 45.

трёх линий, будет иррациональным, а следовательно, и сама линия будет иррациональной и называется триномиалью».

Можно думать вместе с Венке, что Аполлоний, кроме триномиалей и кватриномиалей вероятно, рассматривал и мультиномиали вообще.

2) *Первая тримедиаль.* Под этим именем можно мыслить сумму трёх медиалей, соизмеримых друг с другом только в квадратах и обладающих тем свойством, что попарные произведения одной из этих медиалей на две остальных будут давать рациональные прямоугольники (произведение остальных двух медиалей может быть медиальным).

3) *Вторая тримедиаль* — обладающая тем свойством, что сумма квадратов всех трёх медиалей будет медиальной, равно как и попарные произведения этих медиалей.

4) *Бо́льшая иррациональная.* Под этим именем арабский комментатор подразумевал «линию, составленную из трёх несоизмеримых в степени прямых таких, что одна из них даёт с каждой из двух остальных сумму квадратов рациональную, в то время как прямоугольник, заключённый между двумя другими линиями, будет медиальным». Однако толкование этого текста встречает некоторые затруднения.

Аналогичным образом можно было бы определить и остальные две иррациональности первой гексады, но детализация этих определений встречает при ближайшем подходе некоторые затруднения.

Что касается иррациональных, соответствующих нашей третьей гексаде, то Аполлоний, вероятно, рассматривал выражения вида

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt{c}, \quad [(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt{c}]-\sqrt{d}$$

и т. д.

Дальнейшее расширение области иррациональных должно было итти в направлении радикалов высших степеней. Для античной мысли был только один подход к таким иррациональным — через *многократные среднепропорциональные*.

В самом деле, пусть $l_1, l_2, \ldots, l_n$ определяются непрерывной пропорцией

$$k:l_1=l_1:l_2=l_2:l_3=\ldots=l_{n-1}:l_n=l_n:k',$$

тогда

$$l_1=\sqrt[m+1]{k^{m+1-n}k'^n}.$$

Если k и k' — две рациональные, соизмеримые только в степени, то получаем иррациональную типа

$$\sqrt[2(m+1)]{\alpha^{m+1-n}\beta^n}.$$

Но $\sqrt[n]{R}$ такова, что античные математики не могли строить её с помощью циркуля и линейки, хотя, может быть, и верили в возможность такого построения.

Можно сказать, что такая иррациональность находилась на границах Геометрии. Венке совершенно справедливо выражает сомнение в том, чтобы иррациональности

$$\sqrt[n]{R} + \sqrt[n]{S} + \ldots$$

были исследованы древними по образцу X книги.

Следует заметить, что у Евклида только в *арифметических* книгах кубический корень играет ту же роль, что и квадратный.

Хотя $\sqrt[3]{A}$ и имеет геометрическое значение, как сторона куба, равного A, но в геометрии не находит места, так как $\sqrt[3]{A}$ нельзя построить с помощью циркуля и линейки.

Но к этому следует ещё прибавить, что и *куб* не играет той же роли, что *квадрат*, так как построения, к нему относящиеся, производятся не на плоскости, а *в пространстве*.

А у Евклида *нет стереометрической книги, отвечающей* II *книге* «Начал», нет того предложения, которое отвечает тождеству

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

и является аналогом тождества 4, II

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

играющего важную роль в теории его иррациональных.

Если бы Евклид вышел из плоскости в пространство, то он смог бы создать такой аналогон II книги, например, заменив операции с циркулем и линейкой некоторыми операциями в пространстве, как он это и делает в XI, XII и XIII книгах, но всё-таки теорию кубических иррациональностей он не смог бы создать, поскольку кубическое уравнение не решается при помощи циркуля и линейки.

66. Другие доказательства предложений 105 и 106. В «Приложении» к своему изданию Евклида Гейберг поместил два следующих доказательства предложений 105 и 106.

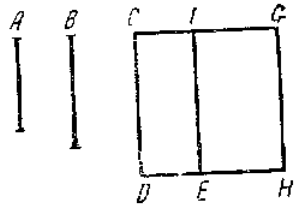
«⟨Предложение 105⟩

Соизмеримая с меньшей ⟨иррациональной⟩ будет меньшей.

Пусть будет меньшая ⟨иррациональная⟩ A и пусть B будет соизмерима с A; я утверждаю, что B будет меньшей (черт. 24).

Отложим рациональную CD и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на A ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; значит, CI будет четвёртым вычетом (предложение 100). К IE же приложим равную ⟨квадрату⟩ на B ⟨площадь⟩ IH, образующую ширину IG. Поскольку теперь A соизмерима с B, то значит, и ⟨квадрат⟩ на

A будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на B. Но ⟨квадрату⟩ на A равна ⟨площадь⟩ CE, ⟨квадрату⟩ же на B равна ⟨площадь⟩ IH; значит, CE будет соизмерима с IH. Как же CE к IH, так будет и ⟨прямая⟩ CI к IG; значит, CI будет линейно соизмерима с IG (предложение 11). Но CI есть четвёртый вычет; значит, четвёртым вычетом будет и IG (предложение 103); значит, ⟨площадь⟩ HI заключается между рациональной ⟨прямой⟩ IE и четвёртым вычетом IG. Если же площадь заключается между рациональной и четвёртым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет меньшей ⟨иррациональной⟩ (предложение 94). ⟨Площадь⟩ же IH квадрирует ⟨прямая⟩ B; значит, B будет меньшей ⟨иррациональной⟩. Что и требовалось доказать.



Черт. 24.

⟨Предложение 105⟩

Соизмеримая с образующей с рациональным целое медиальное будет образующей с рациональным целое медиальное.

Пусть образующая с рациональным целое медиальное будет A, соизмеримая же с ней B; я утверждаю, что B будет образующей с рациональным целое медиальное (черт. 24).

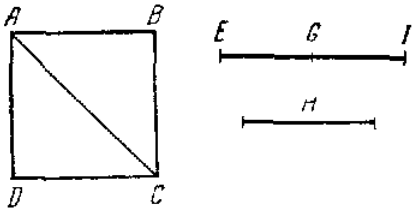
Отложим рациональную CD и приложим к CD равную ⟨квадрату⟩ на A ⟨площадь⟩ CE, образующую ширину CI; значит, CI будет пятым вычетом (предложение 101). К IE же приложим равную ⟨квадрату⟩ на B ⟨площадь⟩ IH, образующую ширину IG. Поскольку теперь A соизмерима с B, то значит, и ⟨квадрат⟩ на A будет соизмерим с ⟨квадратом⟩ на B. Но ⟨квадрату⟩ на A равна ⟨площадь⟩ CE, ⟨квадрату⟩ же на B равна IH; значит, CE будет соизмерима с IH; значит, и ⟨прямая⟩ CI будет линейно соизмерима с IG (предложение 1 книги VI; предложение 11 книги X). Но CI есть пятый вычет, значит, пятым вычетом будет и IG (предложение 103). Но IE рациональна; если же площадь заключается между рациональной и пятым вычетом, то квадрирующая эту площадь будет образующей с рациональным целое медиальное (предложение 95). ⟨Площадь⟩ же IH квадрирует ⟨прямая⟩ B; значит, B будет образующей с рациональным целое медиальное; что и требовалось доказать».

67. Иррациональность квадратного корня из двух. В самом конце X книги в некоторых списках помещается доказательство несоизмеримости диагонали квадрата со стороной. В логической структуре X книги доказательство это является совершенно излишним, потому что в предложении 9 (теорема Теэтета) эта истина доказана в самом общем виде для квадратного корня из всякого неточного квадрата; однако это доказательство интересно в том отношении, что его идея близка к тому доказательству, при помощи которого пифагорейские математики впервые обнаружили иррациональность $\sqrt{2}$.

«Пусть нам будет предложено доказать, что для квадратных фигур диаметр будет линейно несоизмерим со стороной.

Пусть квадрат будет $ABCD$, диаметр же его AC; я утверждаю, что CA будет линейно несоизмерима с AB (черт. 25).

Действительно, если возможно, пусть будет соизмерима; я утверждаю, что окажется, что одно и то же число будет чётным и нечётным. Очевидно теперь, что ⟨квадрат⟩ на AC вдвое больше ⟨квадрата⟩ на AB (предложение 47 книги I). И поскольку CA соизмерима с AB, то значит, CA имеет к AB отношение, как число к числу (предложение 6). Пусть оно будут иметь то, которое EI ⟨имеет⟩ к H, и пусть EI, H будут наименьшие из имеющих с ними одно и то же отношение (ср. предложение 33 книги VII); значит, EI не будет единицей. Действительно, если EI будет единицей, имеет же к H отношение, какое AC имеет к AB, и AC больше AB, то значит, и EI ⟨единица⟩ больше H — числа (предложение 14 книги V); это же нелепо. Значит, EI единицей не будет; значит, будет числом. И поскольку будет, что как ⟨прямая⟩ CA к AB, так и ⟨число⟩ EI к H, то значит, и как ⟨квадрат⟩ на CA к ⟨квадрату⟩ на AB, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на H (предложение 20 книги VI, следствие; предложение 11 книги VIII). ⟨Квадрат⟩ же на CA вдвое больше ⟨квадрата⟩ на AB; значит, и ⟨квадрат⟩ на EI вдвое больше ⟨квадрата⟩ на H; значит, ⟨квадрат⟩ на EI будет чётным; так что и само EI будет чётным. Действительно, если бы оно было нечётным, то и квадрат на нём был бы нечётным, поскольку ведь, если складываются сколько угодно нечетных чисел и количество же их нечётно, то и целое будет нечётным (предложение 23 книги IX), значит, EI будет чётным. Разделим ⟨его⟩ пополам в G. И поскольку EI, H суть наименьшие из имеющих [с ними] то же отношение, то они будут первыми между собой (предложение 21 книги VII). И EI чётное; значит, H будет нечётным. Действительно, если бы оно было чётным, то ⟨числа⟩ EI, H измеряла бы двойка; ибо всякое чётное число имеет половинную часть (определение 6 книги VII); между тем они являются первыми между собой; это же невозможно. Чётным, значит, не будет H; значит — нечётным. И поскольку EI вдвое больше EG, то значит, ⟨квадрат⟩ на EI в четыре раза больше ⟨квадрата⟩ на EG (предложение 11 книги VIII). ⟨Квадрат⟩ же на EI вдвое больше ⟨квадрата⟩ на H; значит, и ⟨квадрат⟩ на H вдвое больше ⟨квадрата⟩ на EG; значит, чётным будет ⟨квадрат⟩ на H. Чётным, значит, вследствие вышесказанного, ⟨будет⟩ и H; но ⟨оно же⟩ и нечётное; это же невозможно. Значит, CA не будет линейно соизмеримым с AB; что и требовалось доказать.

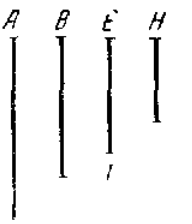


Черт. 25.

Иначе.

[Можно и по-другому доказать, что диаметр квадрата будет несоизмеримым со стороной.]

Пусть вместо *) диаметра будет A, вместо же стороны B; я утверждаю, что A будет линейно несоизмерима с B (черт. 26). Действительно, если возможно, пусть будет [соизмерима; и сделаем] опять, чтобы как A к B, так и число EI к H (ср. предложение 6), и пусть наименьшие из имеющих то же самое отношение с ними будут EI, H (ср. предложение 33 книги VII); значит, EI, H будут первыми между собой (предложение 21 книги VII). Во-первых, я утверждаю, что H не будет единицей. Действительно, если возможно, то пусть будет единицей. И поскольку будет, что как A к B, так и EI к H, то значит, и как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на H (предложение 20 книги VI, следствие; предложение 11 книги VIII). ⟨Квадрат⟩ же на A вдвое больше ⟨квадрата⟩ на B (предложение 47 книги I), значит, и ⟨квадрат⟩ на EI вдвое больше ⟨квадрата⟩ на H. И H есть единица; значит, ⟨квадрат⟩ на EI — двойка; это же невозможно. Значит, H не будет единицей, значит, ⟨будет⟩ числом. И поскольку будет, что как ⟨квадрат⟩ на A к ⟨квадрату⟩ на B, так и ⟨квадрат⟩ на EI к ⟨квадрату⟩ на H, и обратно (предложение 7 книги V, следствие), как ⟨квадрат⟩ на B к ⟨квадрату⟩ на A, так и ⟨квадрат⟩ на H к ⟨квадрату⟩ на EI; ⟨квадрат⟩ же на B измеряет ⟨квадрат⟩ на A, значит, и квадрат на H измеряет ⟨квадрат⟩ на EI; так что и сама сторона H измеряет EI. Измеряет также H и самого себя; значит, H измеряет EI, H, являющихся первыми между собой, это же невозможно. Не будет, значит, A линейно соизмеримой с B; значит, будет несоизмеримой, это и требовалось доказать».



Черт. 26

68. Стевин [49]) об иррациональных числах. Если история пятой книги «Начал» есть история общего понятия иррационального числа, то история X книги представляет историю того специального вида иррациональных чисел, которыми занимается алгебра; это будут радикалы, которые математики XVI и XVII вв. называли «глухими». Одна из наиболее интересных страниц этой истории относится к Стевину.

Его мысль определённо и резко переводит X книгу из Геометрии в Арифметику или, лучше сказать, в числовую Алгебру.

На место несоизмеримых и иррациональных прямолинейных отрезков у него становятся несоизмеримые и иррациональные числа.

Весьма интересны его аргументы за существование и полную *равноправность* с рациональными иррациональных чисел, причём

*) ἀντί вместо — любопытная форма выражения, встречающаяся в «Началах» только в этом месте.

[49]) См. примеч. 43.

под последними он разумеет не иррациональные числа в широком смысле, но числа, выражаемые корнями квадратными, частными видами которых являются те, которые отвечают иррациональным Евклида, а затем и числа, выражаемые радикалами высших степеней.

Стевин считает неправильным заключение *от несоизмеримости к абсурдности*. Из того, что $\sqrt{8}$ несоизмеримо с 2, т. е. из отсутствия общей меры, числа, целое число раз заключающегося как в первом, так и во втором, нельзя делать заключения, что $\sqrt{8}$ абсурдно.

При этом Стевину кажутся неподходящими и другие эпитеты; иррациональное, неправильное, глухое и т. д. числа, которые подчёркивают, если не абсурдность, т. е. несуществование этих чисел, то во всяком случае их *неравноправность*.

Он указывает, что из того, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной, никто не делает заключения, что *диагонали нет*, что она абсурдна. Точно таким же образом из того, что $\sqrt{8}$ и 2 несоизмеримы, нельзя ещё заключить, что $\sqrt{8}$ абсурдно.

Он подчёркивает *относительность понятия иррационального:* диагональ тогда лишь иррациональна, когда сторона принимается за рациональную. Но если диагональ считать рациональной, то иррациональной окажется сторона.

«Меня спросят, — говорит Стевин, — чтобы я объяснил, что такое $\sqrt{8}$? Я тогда отвечу вопросом: что́ такое $\frac{3}{4}$? Мне скажут, что $\frac{3}{4}$ то же, что́ $\frac{6}{8}$, а я скажу, что́ $\sqrt{8}$ то же, что́ $\sqrt{\frac{16}{2}}$.

Если мне скажут, что́ $\frac{3}{4}$ — это 3 числа, которые получаются делением единиц, я скажу, что $\sqrt{8}$ это то, что́ получается извлечением корня из 8 и т. д.».

Убедительна ли аргументация Стевина?

Она сводится к тому, что *те числа*, которые мы можем *определить*, над которыми мы можем *производить действия*, *это действительно* числа.

Но, конечно, остаётся недоказанным, что можно производить над ними те же действия, что можно подвести их под одно и то же определение.

Как это обычно имеет место в науке, в иррациональные числа сперва начинают *верить*, а обоснование им находится только, когда они уже обладают полным правом гражданства в математике.

69. К доказательству несоизмеримости диагонали квадрата со стороной. Кампанус[50]) выводит несоизмеримость диагонали квадрата со стороной из предложения 9, X.

---

[50]) Campanus, Перевод Евклида, Париж, 1516. — M. Cantor. Vorles., Bd. II., гл. 45.

Это доказательство воспроизводится и комментатором Клавием.

Квадрат на диагонали — удвоенный квадрат на стороне, как это следует из 47, I.

Но *двойное отношение* (*duplum*, т. е. 2:1) не может быть тем же, что квадратное число к квадратному, так как для чисел с двойным отношением не существует среднепропорционального, как это выводит Кампанус в схолии к 8, VII. Поэтому квадрат на диаметре к квадрату на стороне не может иметь отношения, как квадратное число к квадратному.

Отсюда на основании 9, X следует, что и диагональ несоизмерима со стороной в длине.

70. О доказательствах иррациональности. Можно сказать, что евклидов признак иррациональности состоит в разложимости числа в *бесконечную* непрерывную дробь

$$a+\cfrac{1}{b-\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\dots}}}$$

Лежандр[51]) даёт достаточный признак иррациональности при разложении числа в обобщённую непрерывную дробь

$$a_0+\cfrac{b_1}{a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\dots}}$$

Пользуясь этим признаком, Лежандр доказывает иррациональность как π, так и π^2.

Но существуют и другие пути к обоснованию иррациональности[52]).

Число α иррационально, если для всякого ε существуют такие целые числа x, y, что

$$0<|\alpha x-y|<\varepsilon.$$

Можно требовать только существования бесконечного числа систем (x_1y_1), (x_2y_2), ... таких, что

$$|\alpha x_1-y_1|>|\alpha x_2-y_2|>\dots>|\alpha x_n-y_n|>\dots$$

71. Последние четыре иррациональности Евклида и биквадратное уравнение. Некоторые историки[53]) видят в предложениях X книги числовое решение не только квадратного, но и *биквадратного уравнения*

$$z^4-az^2+c=0 \qquad (1)$$

---

[51]) Legendre, Eléments de géométrie, Note IV.

[52]) Kosma, Diophantische Approximationen, Berlin, 1936.

[53]) Christiansen, Über die Gleichung vierles Grades des zehnten Buche der Elem. Eucl. (Zeitscarift der Mathematik und Physik, XXXIV (1389), стр. 201—207).

и стараются установить тесную связь последнего с теорией иррациональных Евклида.

Венке представляются основными иррациональности $x \pm y$, получаемые из корня биквадратного уравнения (1):

$$z = \sqrt{\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - c}}.$$

Евклида интересуют сумма и разность

$$x \pm y = \sqrt{A \pm B}$$

при различных условиях, налагаемых на A и B.

Существует четыре возможности:

1. A рац., B рац.
2. A рац., B мед.
3. A мед., B рац.
4. A мед., B мед.

Первый случай отбрасывается, так как он даёт для $x \pm y$ *рациональные* (в евклидовом смысле) значения.

При иных обозначениях рациональных и медиальных случаям

2) $x^2 + y^2 = a, \qquad xy = \sqrt{b},$

3) $x^2 + y^2 = \sqrt{a}, \qquad xy = b,$

4) $x^2 + y^2 = \sqrt{a}, \qquad xy = \sqrt{b}$

будут отвечать иррациональные

$$x \pm y = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}},$$

$$x \pm y = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b}}{2}},$$

$$x \pm y = \sqrt{\frac{\sqrt{a} + \sqrt{a - 4b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a} - \sqrt{a - 4b}}{2}}.$$

Другие иррациональные получаются из этих при условии, что x и y соизмеримы в степени, $x^2 : y^2 = m : n$, где m, n — целые числа *).

*) См. работы А. Е. Раик и А. И. Маркушевича в 1-м выпуске трудов семинара МГУ по истории математики («Историко-математические исследования», I, М. — Л., 1948).

72. Схолия. «Приложение» к X книге в гейберговском издании Евклида заканчивается следующей схолией:

«Вот после того, как найдены линейно несоизмеримые прямые *A*, *B*, отыскиваются и другие ещё в большем количестве величины из двух измерений, я сказал бы «плоскостные», несоизмеримые между собой. Действительно, если для прямых *A*, *B* возьмём среднее пропорциональное *C*, то будет, что как *A* к *B*, так и площадь на *A* к подобной и подобно построенной на *C* (*предложение* 19, *книги* VI, *следствие*), будут ли построенные фигуры квадратами, или другими подобными прямолинейными фигурами, или кругами на диаметрах *A*, *C*, поскольку и круги будут друг к другу, как квадраты на диаметрах (2, XII). Итак, найдены и плоскостные величины, несоизмеримые между собой; что и требовалось доказать (черт. 27).

Черт. 27.

Вот после того, как указаны и различные несоизмеримые величины из двух измерений, покажем из теории телесных ⟨величин⟩, что существуют и телесные ⟨величины⟩, соизмеримые и несоизмеримые между собой. Действительно, если мы на квадратах на *A*, *B* или им равных прямолинейных фигурах воздвигнем равновысокие тела — параллелепипеды, или пирамиды, или призмы, то воздвигнутые будут друг к другу, как основания (32, XI; 5,6, XII). И если соизмеримы основания, то соизмеримыми будут и тела, если же ⟨основания⟩ несоизмеримы, то ⟨и тела будут⟩ несоизмеримыми. Что и требовалось доказать.

Но также и при наличии двух кругов *A*, *B*, если мы построим на них равновысокие конусы или цилиндры, то они будут друг к другу, как основания, т. е. как круги *A*, *B*, (11, XII). И если соизмеримы круги, то соизмеримыми будут и конусы между собой, и цилиндры, если же несоизмеримы круги, то несоизмеримыми будут и конусы и цилиндры (предложение 11). И стало нам ясно, что не только для линий и поверхностей существует соизмеримость и несоизмеримость, но и для телесных фигур».

73. *Невыразимость корня кубического уравнения в иррациональных Евклида* [54]). Одним из замечательных открытий по истории математики является нахождение Бальтазаром Бонкомпани трактата Леонардо Пизанского «О числах квадратных» и двух других, из которых один (Flos) содержит доказательство того, что предложенное Иваном Палермским кубическое уравнение

$$x^3 + 2x^2 + 10x = 20 \qquad (1)$$

не разрешается в иррациональностях X книги «Начал».

---

[54]) Woepke, Sur un essai de déterminer la nature de la racine d'une équation du troisième degré contenue dans un ouvrage de Leonardo de Pise (Journ. de Liouville, т. XIX (1854), стр. 401—456).

Во-первых, Леонардо не берёт все построения с помощью квадратного корня, во-вторых, идеи, положенные в основу его доказательства, относящегося к определённому числовому уравнению, но могущего быть распространённым и на содержащие буквенные параметры, например уравнения, решающие проблему о трисекции угла, — все эти идеи гораздо проще, чем те, которыми мы пользуемся в таких доказательствах, всегда используя свойства неприводимых уравнений.

Вепке (Woepke) облекает доказательства Леонардо, данные в евклидовой геометрической форме, в форму *алгебраическую*. В этой последней форме, от которой можно перейти к геометрической, все иррациональности Евклида приводятся к одной из форм

$$\sqrt{n},\ \sqrt[4]{n},\ m+\sqrt{n},\ \sqrt{m}+\sqrt{n},\ \sqrt{m+\sqrt{n}}$$
$$\sqrt{\sqrt{m}+\sqrt{n}}.$$

Леонардо сперва даёт доказательство, что уравнение (1) не удовлетворяется целым, затем вообще рациональным числом, причём, конечно, берёт только положительные числа, так как отрицательные корни тогда не признавались. Эту часть читатель легко может восстановить. В алгебраической форме всё сводится к подстановке вместо x упомянутых выше иррациональных выражений, что x не равно $\sqrt[4]{n}$, выводится из того, что из равенства

$$x+\frac{x^3}{10}=2-\frac{2x^2}{10}$$

следовало бы, что $\sqrt[4]{n}+\frac{\sqrt[4]{n}\sqrt{n}}{10}$ (первая бимедиаль) равняется вычету $2-\frac{2\sqrt{n}}{10}$. Что x не равно $m+\sqrt{n}$, выводится из того, что в этом случае биномиаль

$$(m^3+2m^2+3mn+10m+2n)+(3m^2+4m+n+10)\sqrt{n}$$

была бы рациональной.

Таким же образом предположение $x=\sqrt{m+\sqrt{n}}$ приводит к $2m+2\sqrt{n}+\sqrt{r+s\sqrt{n}}=20$, невозможность чего доказывается тоже евклидовскими приёмами, и т. д.

ОГЛАВЛЕНИЕ

От издательства 5
Книга седьмая 9
Книга восьмая 42
Книга девятая 70
Книга десятая 101
Комментарии к книге VII 257
Комментарии к книге VIII 304
Комментарии к книге IX 324
Комментарии к книге X 358